République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran- M. Boudiaf

Faculté des Mathématiques et Informatique

Mathématiques 1

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants

1 ère **ANNÉE SOCLE COMMUN**

Domaine Sciences et Technologie

Par :

Dr : BENAISSA CHERIF Amin

Département de Mathématiques

E-mail : amine.banche@gmail.com

U.S.T.O.M.B 2020-2021

Avant-propos

Ce polycopié vise à présenter le cours de Mathématiques 1. Il est destiné aux étudiants de la première année « SOCLE COMMUN- Domaine Sciences et Technologie » . Nous considérons comme un manuel supplément à d'autres ouvrages plus détaillés.

Ce polycopié comporte six chapitres principaux, où sont exposées les notions de méthode du raisonnement Mathématique, des ensembles, les relations et les applications, des fonctions réelles à une variable réelle, d'application aux fonctions élémentaires, de développement limité et d'algèbre linéaire. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices résolus permettant d'aller plus loin dans la compréhension et l'assimilation des notions mathématiques introduites.

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue pour m'aider à améliorer le contenu de ce travail.

A. Benaissa Cherif

Table des matières

1 Méthodes du Raisonnement Mathématique

1.1 Logique Mathématique

1.1.1 Assertions

Définition 1.1.1. *Une assertion est une phrase qui peut être vraie ou fausse et ne peut pas être les deux en même temps.*

Exemple 1.1.1.

a) $2+2=4$ *est une assertion vraie.*

b) $3\times 2=7$ *est une assertion fausse.*

c) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *on a* $x^2\geq 0$ *est une assertion vraie.*

e) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *on a* $|x|=1$ *est une assertion fausse.*

1.1.2 Les opérateurs logiques mathématique

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

L'opérateur logique "et" ($\wedge$) **(Conjonction)**

L'assertion "P et Q " est vraie si P est vraie et Q est vraie, et elle est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P\wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.1.2.

a) $(3+5=8)\wedge(3\times 6=18)$ *est une assertion vraie.*

b) $(2+2=4)\wedge(2\times 3=7)$ *est une assertion fausse.*

L'opérateur logique "ou" ($\vee$) **(Disjonction)**

L'assertion "P ou Q" est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion (P ou Q) est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.1.3.

a) $(2+2=4) \vee (3 \times 2 = 6)$ *est une assertion vraie.*

b) $(2=4) \vee (4 \times 3 = 7)$ *est une assertion fausse.*

La négation "non" $(\overline{\mathbf{P}})$

L'assertion $\overline{P}$ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.1.4. *La négation de l'assertion* $3 \geq 0$ *est l'assertion* $3 < 0$.

L'implication $(\Rightarrow)$

L'assertion $\left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)$ est notée $P \Rightarrow Q$. Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.1.5. $2+2=5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ *est vraie ! Eh oui, si* P *est fausse alors l'assertion* $P \Rightarrow Q$ *est toujours vraie.*

L'équivalence $(\Leftrightarrow)$

L'équivalence est définie par l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$, elle est notée $P \Leftrightarrow Q$. On dira (P est équivalent à Q) ou (P équivaut à Q) ou (P si et seulement si Q). Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément ou lorsque P et Q sont fausses simultanément. Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.1.6. *Pour* $x, y \in \mathbb{R}$, *l'équivalence* "$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $y = 0$" *est vraie.*

Proposition 1.1.1. *Soient P, Q et R trois assertions. Nous avons les équivalences suivantes :*

(1) $P \Leftrightarrow \overline{\left(\overline{P}\right)}$

(2) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

(3) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

(4) $\left(\overline{P \wedge Q}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right)$

(5) $\left(\overline{P \vee Q}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$

(6) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(7) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(8) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$

1.1.3 Quantificateurs

Le quantificateur "$\forall$" : pour tout

L'assertion

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit : pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.1.7.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ *est une assertion vraie.*
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$ *est une assertion fausse.*

Quantificateur "$\exists$" : il existe

L'assertion

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On lit il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie).

Exemple 1.1.8.

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$ *est vraie, par exemple $x = 0$.*
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ *est fausse.*

La négation des quantificateurs

La négation de

$$(\forall x \in E, \quad P(x)) \quad \text{est} \quad \left(\exists x \in E, \quad \overline{P(x)}\right).$$

Exemple 1.1.9. *La négation de* $\left(\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 \geq 0}_{P(x)}\right)$ *est l'assertion*

$$\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 < 0}_{\overline{P(x)}}.$$

La négation de
$$(\exists x \in E, \quad P(x)) \quad \text{est} \quad \left(\forall x \in E, \quad \overline{P(x)}\right).$$

Exemple 1.1.10. *La négation de* $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{x < 0}_{P(x)}\right)$ *est l'assertion*
$$\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{x \geq 0}_{\overline{P(x)}}.$$

L'emploi de plusieurs quantificateurs

On peut combiner plusieurs quantificateurs dans une proposition quantifiée seulement il ne faut pas changer leurs dispositions s'ils sont de natures différentes.

Exemple 1.1.11.

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ *et* $(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ *sont deux propositions quantifiées différentes.*

(ii) $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ *et* $(\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ *sont deux propositions quantifiées équivalentes.*

Négation d'une proposition quantifiée

Quand on forme la négation d'une proposition quantifiée, on remplace le quantificateur universel $\forall$ par l'existentiel $\exists$ et vice versa, la propriété $P(x)$ par sa négation $\overline{P(x)}$.

Exemple 1.1.12.

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ *sa négation est*
$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y \neq 2.$$

(ii) $(\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : (x + y = 1) \text{ et } (2xy \leq 1))$ *sa négation est :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : (x + y \neq 1) \text{ ou } (2xy > 1)$$

(iii) $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R} : x + y \geq z^2)$ *sa négation est :*
$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : x + y < z^2.$$

1.2 Raisonnements

1.2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre alors que Q est vraie.

Exemple 1.2.1. *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $a = b \Rightarrow \frac{a+b}{2} = b$. *Prenons* $a = b$, *alors* $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$, *donc*
$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}.$$

Ainsi $\frac{a+b}{2} = b$.

1.2.2 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right).$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$, on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.2.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\underbrace{(x \neq 2 \text{ et } x \neq -2)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(x^2 \neq 4\right)}_{Q}.$$

Par contraposition ceci est équivalent

$$\underbrace{\left(x^2 = 4\right)}_{\overline{Q}} \Rightarrow \underbrace{(x = 2 \text{ ou } x = -2)}_{\overline{P}}.$$

En effet, prenons $x^2 = 4$, alors $(x-2)(x+2) = 0$, donc $x = 2$ ou $x = -2$.

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Rightarrow Q$, repose sur le principe suivant :
On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exemple 1.2.3. *Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.*
Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \quad \text{et} \quad a \neq b.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}\right) &\Leftrightarrow a(a+1) = b(b+1) \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 = -(a-b) \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b) \end{aligned}$$

Ceci est équivalent

$$(a-b)(a+b) = -(a-b) \quad \text{et} \quad a - b \neq 0.$$

donc en divisant par $a-b$ on obtient

$$a + b = -1.$$

La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

1.2.4 Raisonnement cas par cas

Lorsqu'on souhaite vérifier une propriété $P(x)$ pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut partager cet ensemble en n sous-ensembles (non vides) $A_1, A_2, ..., A_n$ (selon le nombre de cas à traiter) et montrer que la propriété est vérifiée sur chacun d'eux sans exception, puis faire la conclusion qu'elle est vérifiée partout sur E.

Exemple 1.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n = \frac{1}{2}n(n+1) \in \mathbb{N}$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous distinguons deux cas.
Premier cas : $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, *alors*

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1) = k(2k+1) \in \mathbb{N}.$$

Deuxième cas : $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, *alors*

$$a_n = \frac{1}{2}(2k+1)(2k+2) = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}.$$

Dans tous les cas $a_n = \frac{1}{2}n(n+1) \in \mathbb{N}$.

1.2.5 Raisonnement par contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E : P(x))$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Exemple 1.2.5. *Montrer que l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 1)$ est fausse.*
Un contre-exemple est $x = 0 \in \mathbb{R}$, car $(0)^2 - 1 > 1$ est fausse.

1.2.6 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

i) On prouve $P(0)$ est vraie.

ii) On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.6. *Montrer que*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : 2^n > n.$$

Notons

$$P(n) : 2^n > n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n, \text{ car par } P(n) \text{ nous savons que } 2^n > n, \\ &\geq n + 1, \text{ car } 2^n \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Remarque. *Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.*

1.3 Exercices

1.3.1 Énoncés

Exercice 1. *Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

(a) $(2 < 3)$ *et* $(2 \text{ divise } 4)$ (b) $(2 < 3)$ *et* $(2 \text{ divise } 5)$

(c) $(2 < 3)$ *ou* $(2 \text{ divise } 5)$ (d) $(2 < 3)$ *et* $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$

(e) $\overline{(2 < 3)}$ *ou* $(2 \text{ divise } 5)$

Exercice 2. *Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose :* $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \; ... x = 2$.

(2) $\forall z \in \mathbb{C} : z = \overline{z} ... z \in \mathbb{R}$.

(3) $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 ... x = 1$.

Exercice 3. *Soient les quatre assertions suivantes :*

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0,$ (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0,$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0,$ (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x.$

(1) *Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?*

(2) *Donner leur négation.*

Exercice 4. *Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.*

Exercice 5. *Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'assertions suivante :*

Si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 6. *Montrer :*

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 7. *Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 3$.

1.3.2 Correction des exercices

Solution 1.
(a) $(2 < 3)$ *est vraie et* $(2$ *divise* $4)$ *est vraie donc* $(2 < 3)$ *et* $(2$ *divise* $4)$ *est vraie.*
(b) $(2 < 3)$ *est vraie et* $(2$ *divise* $5)$ *est fausse, l'une des deux est fausse donc* $(2 < 3)$ *et* $(2$ *divise* $5)$ *est fausse.*
(c) $(2 < 3)$ *est vraie et* $(2$ *divise* $5)$ *est fausse, l'une des deux est vraie donc* $(2 < 3)$ *ou* $(2$ *divise* $5)$ *est vraie.*
(d) $(2 < 3)$ *est vraie et* $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$ *est vraie, les deux sont vraies donc* $((2 < 3)$ *et* $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$ *est vraie.*
(e) $(2 < 3)$ *est vraie donc* $\overline{(2 < 3)}$ *est fausse et* $(2$ *divise* $5)$ *est fausse par conséquent* $\overline{(2 < 3)}$ *ou* $(2$ *divise* $5)$ *est fausse car les deux assertions sont fausses.*

Solution 2.
Le connecteur logique sur les assertion suivante

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$

(2) $\forall z \in \mathbb{C} : z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$

(3) $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Solution 3.
(a) *est fausse. Car sa négation qui est*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y < 0$$

est vraie. Etant donné $x \in \mathbb{R}$ *il existe toujours un* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x + y < 0$*, par exemple on peut prendre* $y = -(x+1)$ *et alors* $x + y = -1 < 0$.
(b) *est vraie, pour un* x *donné, on peut prendre (par exemple)* $y = -x + 1$ *et alors* $x + y = 1 > 0$. *La négation de* (b) *est*

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

$(c)\, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$, *est fausse, par exemple* $x = -1$, $y = 0$. *La négation est*

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

(d) *est vraie, on peut prendre* $x = -1$. *La négation est :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x.$$

Solution 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* n *est le carré d'un entier, alors* $2n$ *n'est pas le carré d'un entier, c'est-à-dire*

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N}^* : n = k^2\right)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(\forall m \in \mathbb{N} : 2n \neq m^2\right)}_{Q}.$$

Raisonnons par l'absurde.
On suppose donc que n *est le carré d'un entier, et que* $2n$ *est lui aussi le carré d'un entier, c'est-à-dire*

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N}^* : n = k^2\right)}_{P} \text{ et } \underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N}^* : 2n = m^2\right)}_{\overline{Q}}.$$

Alors

$$\exists k, m \in \mathbb{N}^* : 2n = 2k^2 = m^2.$$

donc, $2k^2 = m^2$ *et en prenant la racine carrée,*

$$\mathbb{Q}^c \ni \sqrt{2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Or $\sqrt{2}$ *est irrationnel, on a une contradiction!*

Solution 5.
Soit n *un entier. Montrons l'assertion suivante :*

Si n^2 *est impair, alors* n *est impair.*

c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k+1\right)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m+1\right)}_{Q}.$$

La contraposée de l'assertion est :

Si n *est pair, alors* n^2 *est pair,*

c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\right)}_{\overline{Q}} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k\right)}_{\overline{P}}.$$

En effet, s'il existe $m \in \mathbb{N} : n = 2m$*, alors*

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\left(2m^2\right) = 2k,$$

donc n^2 *est pair. Par le principe de contraposition, on a démontré l'assertion de l'énoncé.*

Solution 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose l'assertion suivante :*

$$P(n) : 1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

$P(1) : 1^1 = \frac{1}{6} 1 (1+1)(2+1)$ *est vraie .*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$*, supposons que* $P(n)$ *est vraie, alors*

$$\begin{aligned} 1^1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

Ce qui prouve $P(n+1)$.
Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 7.

Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 3.$$

Soit l'hypothèse de récurrence :

$$P(n) : x_n > 3, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La proposition $P(0)$ est vraie, car $x_0 = 4 > 3$.

Soit $n \geq 0$, supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2},$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc

$$x_n + 2 > 0 \quad \textit{et} \quad 2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0.$$

L'étude de la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x - 9$, pour $x > 3$, on obtient

$$f(x) > 0, \ \textit{pour tout } x \geq \frac{3}{4}\left(1 + \sqrt{7}\right) > 3.$$

Alors $f(x_n) > 0$, car $x_n > 3$, ça signifie que $x_{n+1} - 3 > 0$, donc la proposition $P(n+1)$ est vraie.

2 Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Théorie des ensembles

Définition 2.1.1. *Un ensemble est une collection d'éléments.*
Parmi les ensemble, un ensemble est particulier, c'est l'ensemble vide, noteé $\emptyset$.
Soit E *un ensemble, on note* $x \in E$ *si* x *est un élément de* E, *et* $x \notin E$ *dans le cas contraire.*

Exemple 2.1.1. *On a* $\{0,1\}$, *{rouge , noir}, et* $\{0,1,2,...\} = \mathbb{N}$ *sont des ensembles.*
Alors $0 \in \{0,1\}$ *et* $2 \notin \{0,1\}$.

2.1.1 Inclusion, union, intersection, complémentaire

Définition 2.1.2. *Un ensemble* E *est inclus dans un ensemble* F, *si tout élément de* E *est aussi un élément de* F *et on écrit* $E \subset F$. *Autrement dit :*

$$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F.$$

On dit alors que E *est un sous-ensemble de* F *ou une partie de* F.

Exemple 2.1.2. *On a* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1.3. *Deux ensembles* E *et* F *sont égaux si et seulement si chacun est inclu dans l'autre, c'est-à-dire*

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \quad \text{et} \quad E \subset F.$$

Exemple 2.1.3. *Si* $E = \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x-1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\} = [0,2] . \end{aligned}$$

Définition 2.1.4. *Soit* E *un ensemble, on forme un ensemble appelé ensemble des parties de* E, *noté* $\mathcal{P}(E)$ *qui est caractérisé par la relation suivante*

$$\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\} .$$

Exemple 2.1.4. *Si* $E = \{1, 2, 3\}$, *alors*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

donc $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$ *et* $E \in \mathcal{P}(E)$.

Définition 2.1.5. *Soit* E *un ensemble, on appelle ensemble complémentaire de* $A \subset E$*, noté* $C_E A$ *où* A^c *l'ensemble des éléments de* E *qui n'appartiennent pas à* A*, c'est-à-dire*

$$C_E A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

Définition 2.1.6. *On appelle ensemble réunion de deux ensembles* A *et* B*, noté* $A \cup B$ *l'ensemble formé des éléments* x *qui appartiennent à* A *ou appartiennent à* B*, c'est-à-dire*

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On appelle ensemble intersection de deux ensembles A *et* B*, noté* $A \cap B$ *l'ensemble formé des éléments* x *qui appartiennent à* A *et appartiennent à* B*, c'est-à-dire*

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemple 2.1.5. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{2, 3, 4, 5\}$*, alors* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et* $A \cap B = \{2, 3\}$.

Définition 2.1.7. *Soit* E *un ensemble, on dit que l'ensemble* E *est fini si le nombre d'éléments de* E *est fini.*
Le nombre d'éléments de E *s'appelle le cardinal de* E*, noté* $Card(E)$.

Exemple 2.1.6. *Si* $E = \{0, 1, 2, 3\}$*, alors* $Card(E) = 4$*, l'ensemble* $\mathbb{N}$ *n'est pas fini,* $Card(\emptyset) = 0$.

Définition 2.1.8. *Soit* E *un ensemble, on appelle différence de* A *et* B*, noté* $A \backslash B$*, l'ensemble formé des éléments* x *qui appartiennent à* A *et n'appartiennent pas à* B*, c'est-à-dire*

$$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

On appelle différence symétrique de A *et* B*, noté* $A \Delta B$*, l'ensemble formé des éléments* x *qui appartiennent à* $A \cup B$ *et n'appartiennent pas à* $A \cap B$*, c'est-à-dire*

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Exemple 2.1.7. *Si* $E = \mathbb{R}$*,* $A = [0, 1]$ *et* $B =]0, +\infty[$*, alors*

$$A \backslash B = \{0\}, \quad B \backslash A =]1, +\infty[\quad \text{et} \quad A \Delta B = \{0\} \cup]1, +\infty[.$$

Remarque. *Soient* A, B, C *des parties d'un ensemble* E*, alors il est claire que*

- *Commutativité :* $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$.
- *Associativité :*$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Proposition 2.1.1. *Soient* A, B, C *des parties d'un ensemble* E*, alors*

- *Distributivité :* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

- *Distributivité :* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration.
On a

$$\begin{aligned}
(x \in A \cap (B \cup C)) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),
\end{aligned}$$

alors $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}
(x \in A \cup (B \cap C)) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),
\end{aligned}$$

alots $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

Proposition 2.1.2 (Loi de Morgan)**.** *Soient A et B des parties d'un ensemble E, alors*

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B) \quad \text{et} \quad C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
(x \in C_E(A \cap B)) &\Leftrightarrow (x \notin A \cap B) \Leftrightarrow \left(\overline{x \in A \cap B}\right) \\
&\Leftrightarrow \overline{(x \in A \text{ et } x \in B)} \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in C_E(A) \text{ ou } x \in C_E(B)) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cup C_E(B),
\end{aligned}$$

donc $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.

$$\begin{aligned}
(x \in C_E(A \cup B)) &\Leftrightarrow (x \notin A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\
&\Leftrightarrow (x \in C_E(A) \text{ et } x \in C_E(B)) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cap C_E(B),
\end{aligned}$$

donc $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$. □

Remarque. *Soit A un sous ensemble de E, alors $C_E(C_E(A)) = A$. En effet,*

$$\begin{aligned}
(x \in C_E(C_E(A))) &\Leftrightarrow (x \notin C_E(A)) \Leftrightarrow \overline{(x \in C_E(A))} \\
&\Leftrightarrow \overline{(x \notin A)} \Leftrightarrow (x \in A).
\end{aligned}$$

2.1.2 Produit cartésien

Définition 2.1.9. *On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Exemple 2.1.8. *Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 5\}$,alors*

$$E \times F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$$

$$F \times E = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\} \neq E \times F.$$

Notation. *On note E^2 le carré cartésien $E \times E$. Plus généralement, on définit le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$ par*

$$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in E_i, \text{ pour } i = 1, ..., n\}.$$

Exemple 2.1.9. *Si $E = \{1, 2\}$, alors*

$$E^2 = E \times E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$E^3 = E \times E \times E = \left\{ \begin{array}{c} (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), \\ (2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 2) \end{array} \right\}.$$

2.2 Relation d'ordre, Relation d'équivalence

2.2.1 Relations binaires

Définition 2.2.1. *On appelle relation binaire sur un ensemble E, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non, , notée $x\mathcal{R}y$ et on lit x est en relation avec y.*

Exemple 2.2.1. *Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \geq 0.$$

Définition 2.2.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Pour tous $x, y, z \in E$, on dit que $\mathcal{R}$ est*

(1) *Réflexive, si chaque élément est en relation avec lui même, c'est à dire*

$$x\mathcal{R}x, \qquad \forall x \in E.$$

(2) *Symétrique, si pour tout $x, y \in E$, si x est en relation avec y alors y est en relation avec x, c'est à dire*

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x, \qquad \forall x, y \in E.$$

(3) *Transitive, si pour tout $x, y, z \in E$, si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z, c'est à dire*

$$(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z, \qquad \forall x, y, z \in E.$$

(4) *Anti-symétrique, si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, alors ils sont égaux, c'est à dire*

$$(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x) \Rightarrow x{=}y, \qquad \forall x, y \in E.$$

2.2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2.3. *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.*

Définition 2.2.4. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle classe d'équivalence de $x \in E$, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par $\mathcal{R}$, noté $\dot{x}$ ou $cl\,(x)$ ou bien $\mathcal{C}\,(x)$*

$$\mathcal{C}\,(x) = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}\,.$$

La classe d'équivalence $\mathcal{C}\,(x)$ est non vide car $\mathcal{R}$ est réflexive et contient de ce fait au moins x. On notera par

$$E/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}\,(x) : x \in E\}\,.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation $\mathcal{R}$.

Exemple 2.2.2. *Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation est bien une relation d'équivalence. En effet,

- *Pour $x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}x \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{Z}$, comme $0 \in \mathbb{Z}$, alors $x\mathcal{R}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive,*
- *Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y\mathcal{R}x,$$

  alors $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.
- *Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z) &\Rightarrow (x - y \in \mathbb{Z} \quad et \quad y - z \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow (x - y + y - z \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow (x - z \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)\,, \end{aligned}$$

  alors $\mathcal{R}$ est une relation transitive.

Donc, l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{C}\,(x)$ est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\,(x) &= \{y \in \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \in x + \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y = k + x : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k + x : k \in \mathbb{Z}\}\,, \end{aligned}$$

si $x \in \mathbb{Z}$, on a $\mathcal{C}\,(x) = \mathbb{Z}$.

2.2.3 Relation d'ordre

Définition 2.2.5. *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite une relation d'ordre si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.*

Exemple 2.2.3. *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation x divise y, c'est-à-dire*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx.$$

Alors

- *Pour $x \in \mathbb{N}^*$: x divise x, donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive,*
- *Pour $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise z, donc x divise z, ça signifie que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.*
- *Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise x, alors*

$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : y = k_1 x \\ y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : x = k_2 y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x = k_2 k_1 x \\ \Rightarrow \quad x\left(1 - k_2 k_1\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad k_2 k_1 = 1,\ car\ x \neq 0, \end{array}$$

il vient que $k_2 k_1 = 1$, comme $k_2, k_1 \in \mathbb{N}^*$, alors $k_2 = k_1 = 1$, c'est-à-dire $x = y$, ça signifie que $\mathcal{R}$ est une relation anti-ymétrique.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

L'ordre total et l'ordre partiel

Définition 2.2.6. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur un ensemble E, on dit que $\mathcal{R}$ est totale, si pour tout $x, y \in E$, on a*

$$x\mathcal{R}y \quad ou \quad y\mathcal{R}x.$$

Sinon, on dit que $\mathcal{R}$ est partielle, c'est-à-dire

$$\exists x, y \in E : ni\ x\mathcal{R}y \quad et \quad ni\ y\mathcal{R}x$$

Exemple 2.2.4. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = nx.$$

Pour $x = 2$ et $y = 3$, on a ni $x\mathcal{R}y$ ni $y\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.

2.3 Les applications

2.3.1 Définition d'une application

Définition 2.3.1. *Soient E et F des ensembles donnés, on appelle application de E dans F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui associe à tout élément de E un et seul élément de F, on écrit*

$$\begin{array}{rl} f : E & \to F \\ x & \to f(x) \end{array}$$

L'ensemble E est dit ensemble de départ et F est dit ensemble d'arrivée.
L'élément x est dit l' antécédent et y est dit l'image de x par f.
L'application f est dite fonction si, pour chaque $x \in E$, il existe au plus $y \in F$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 2.3.1. *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, tel que $f(n) = n + ie^n$, alors f est une application, avec $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{C}$.*

Définition 2.3.2 (Graphe)**.** *Soient E et F des ensembles donnés. Le graphe d'une application $f : E \to F$ est*

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Définition 2.3.3 (Égalité)**.** *Soient $f, g : E \to F$ des applications. On dit que f, g sont égales si et seulement si*

$$\textit{pour tout } x \in E : f(x) = g(x).$$

On écrit alors $f = g$.

Définition 2.3.4 (Composition)**.** *Soient E, F et G trois ensembles et f et g deux applications telles que*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On peut en déduire une application de E dans G notée $g \circ f$ et appelée application composée de f et g, par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \textit{pour tout } x \in E$$

Définition 2.3.5. *Soit E un ensemble, on appelle application identité, notée $id : E \to E$ l'application qui vérifie $id(x) = x$, $\forall x \in E$.*

Exemple 2.3.2. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ définies par :*

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \textit{et} \quad g(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ est donnée par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.3.6. *Soit $f : E \to F$ une fonction. On appelle domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des éléments $x \in E$ fait auquels il existe un unique élément $y \in F$, telle que $y = f(x)$.*

Exemple 2.3.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, alors*

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[.$$

Définition 2.3.7. *Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$ une application. On appelle restriction de f à A, l'application $f_{|A} : E \to F$ définie par*

$$f_{|A}(x) = f(x), \quad \textit{pour tout } x \in A.$$

Définition 2.3.8. *Soit $E \subset G$ et $f : E \to F$ une application. On appelle prolongement de f à G, toute application g de G vers F dont la restriction à E est f.*

2.3.2 Image directe, image réciproque

Définition 2.3.9. *Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'image directe de A par f est l'ensemble*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset F.$$

Exemple 2.3.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si $A = [0, 1]$, alors*

$$f([0,1]) = \{f(x) : x \in [0,1]\} = \{2x + 1 : x \in [0,1]\},$$

On a

$$x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 3,$$

donc $f([0,1]) = [1,3]$.

Définition 2.3.10. *Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 2.3.5. *Soit f l'application définie par $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, alors*

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,1]) &= \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 \leq 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq |x| \leq 1\} = [-1, 1]. \end{aligned}$$

Soit g définie par $g(x) = \sin(\pi x)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) = 0\} = \{x : x = k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Proposition 2.3.1. *Soient E, F deux ensembles quelconques et une application $f : E \to F$. Pour tous $A, B \subset E$ et $X, Y \subset F$, on a les propriétés suivantes :*

(1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ *et* $X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *et* $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(3) $f(A \cup B) = f(A) \cup F(B)$ *et* $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(4) $A \subset f^{-1}(f(A))$ *et* $f(f^{-1}(X)) \subset X$.

2.3.3 Application injective, surjective, bijective

Définition 2.3.11. *Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemple 2.3.6. *Soit f l'application définie par $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, alors f est injective, soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$tels que $f(x_1) = f(x_2)$,*

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ car } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Définition 2.3.12. *Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective si et seulement si : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, c'est-à-dire*

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Exemple 2.3.7. *Soit f l'application définie par $f(x) = |x|$ de $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, alors f est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$, pour $x = y$ ou $x = -y$, on a $x \in \mathbb{Z}$ et*

$$f(x) = |x| = y,$$

donc il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$.

Définition 2.3.13. *Soit $f : E \to F$. On dit que f est bijective (ou f est une bijection de E sur F) si et seulement si : f est à la fois injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :*

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

Exemple 2.3.8. *Soit f l'application définie par $f(x) = x - 7$ de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, alors f est bijective. En effet, soit $y \in \mathbb{Z}$, tel que $f(x) = y$, alors $x = y + 7$, donc il existe un unique x dans $\mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$.*

Remarque. *Si l'application f est bijective, et seulement dans ce cas, à tout $y \in F$ on fait correspondre un $x \in E$ et un seul.*

Définition 2.3.14. *Soit $f : E \to F$ une application bijective. On définit l'application $f^{-1} : F \to E$, appelée application réciproque de f, donnée par $f^{-1}(x) = y$ si et seulement si $f(y) = x$.*

Exemple 2.3.9. *Soit f l'application définie par $f(x) = x^2 + 1$ de $\mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$, alors f est bijective, car pour tout $y \in [1, \infty[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x = \sqrt{y-1}$. La bijection réciproque est $f^{-1} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}, \quad \textit{pour tout } x \in [1, +\infty[.$$

Proposition 2.3.2. *Soit E,F des ensembles et $f : E \to F$ une application. L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que*

$$f \circ g = id_F \qquad \textit{et} \qquad g \circ f = id_E.$$

Exemple 2.3.10. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f est bijective, sa bijection réciproque est $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x)$. On a $f \circ g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tel que*

$$(f \circ g)(x) = e^{\ln x} = x = id_{\mathbb{R}_+^*}(x) \quad \textit{et} \quad (g \circ f)(x) = \ln e^x = x = id_{\mathbb{R}}(x).$$

Proposition 2.3.3. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.4 Exercices

2.4.1 Énoncés

Exercice 8.

(1) *On considère les ensembles suivants :*

$$A = \{1, 3, 7, 9, 12\}, \quad B = \{1, 3, 2\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9\}, \quad D = \{3, 1\}.$$

Décrire les ensembles suivants et leurs cardinaux :

$$A \cap B, \quad A \backslash B, \quad A \Delta B, \quad D \times C, \quad B \cap C, \quad C_D A, \quad D \cup A, \quad \mathcal{P}(C).$$

(2) *Décrire les ensembles suivants :*

$$F = [-2, 1[\cap]-\infty, 0], \quad E = [-2, 1[\cup]-\infty, 0], \quad G = [-2, 1[\, \Delta \,]-\infty, 0], \quad H = C_{\mathbb{R}} F.$$

Exercice 9. *Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.*

(1) Montrer que : $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

(2) Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, montrer que $B \subset C$.

Exercice 10. *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$(x_1, y_1) \, \mathcal{R} \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 0)$.*

(3) *Même questions pour la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$(x_1, y_1) \, \mathcal{R} \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Exercice 11. *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre*

(2) *L'ordre est il total ?*

Exercice 12. *Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$(x_1, y_1) \, \mathcal{R} \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.*

Exercice 13.

(1) *Montrer que les fonctions suivantes sont des applications puis vérifier si elle sont injectives, surjectives ou bijectives :*

$$v : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \to n^2 \end{array}, \qquad i : \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \to 2n^2 - 7 \end{array}, \qquad k : \begin{array}{c} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ n \to 4n^2 + 5 \end{array},$$

$$f : \begin{array}{l} [-1, 1] \to [0, 1] \\ x \to \sqrt{1 - x^2} \end{array}, \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \backslash \{-3\} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{2 - x}{x + 3} \end{array}, \qquad h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{array}.$$

(2) *Calculer* $v \circ k$, $i \circ k$, $k \circ i$.

(3) *Montrer que l'application* $u :]1, \infty[\to]0, \infty[$ *définie par :* $u(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *est bijective et calculer sa bijection réciproque.*

Exercice 14. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:* $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) f *est-elle injective? surjective ?*

(2) *Montrer que la restriction* $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ *est une bijection.*

Exercice 15. *Soit* f *l'application de* $[0, +\infty[$ *dans* $[0, +\infty[$ *définie par*

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - 1.$$

(1) *Montrer que* f *est bijective.*

(2) *Déterminer sa fonction réciproque* f^{-1}.

2.4.2 Correction des exercices

Solution 8.

(1) *On a*

$$A = \{1, 3, 7, 9, 12\}, \quad B = \{1, 3, 2\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9\}, \quad D = \{3, 1\}.$$

Alors

$$A \cap B = \{1, 3\},\ Card(A \cap B) = 2,\ A \backslash B = \{7, 9, 12\},\ Card(A \backslash B) = 3,$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 3, 2, 7, 9, 12\} \setminus \{1, 3\} = \{2, 7, 9, 12\},\ Card(A \Delta B) = 4,$$

$$D \times C = \{3, 1\} \times \{3, 4, 7, 9\} = \{(3, 3), (3, 4), (3, 7), (3, 9), (1, 3), (1, 4), (1, 7), (1, 9)\},$$

$$Card(D \times C) = 8, B \cap C = \{3\},\ Card(B \cap C) = 3,$$

$$C_A D = \{7, 9, 12\}, Card(C_A D) = 3, D \cup A = A, Card(D \cup A) = 5,$$

$$\mathcal{P}(C) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{3\}, \{4\}, \{7\}, \{9\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{4, 7\}, \{4, 9\}, \{7, 9\} \\ \{3, 4, 7\}, \{3, 4, 9\}, \{3, 7, 9\}, \{4, 7, 9\}, \{3, 4, 7, 9\} \end{array} \right\},$$

$$Card(\mathcal{P}(C)) = 2^{Card(C)} = 2^4 = 16.$$

(2) *On a,*

$$\begin{array}{l} F = [-2, 1[\cap]-\infty, 0] = [-2, 0], \\ E = [-2, 1[\cup]-\infty, 0] =]-\infty, 1[, \\ G = [-2, 1[\Delta]-\infty, 0] =]-\infty, 1[\setminus [-2, 0] =]-\infty, -2[\cup]0, 1[, \\ H = C_{\mathbb{R}} F =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[. \end{array}$$

Solution 9.

(1) *Soit* A, B *et* C *trois parties d'un ensemble* E, *alors*

$$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash B) \cap C_E C = (A \cap C_E B) \cap C_E C,$$

et

$$\begin{aligned} A\backslash (B \cup C) &= A \cap C_E (B \cup C) = A \cap (C_E B \cap C_E C) \\ &= (A \cap C_E B) \cap C_E C \\ &= (A\backslash B)\backslash C. \end{aligned}$$

(2) *On a* $A \cup B \subset A \cup C$ *et* $A \cap B \subset A \cap C$. *Soit* $x \in B$, *montrons que* $x \in C$. *En effet*

$$\begin{aligned} (x \in B) &\Rightarrow (x \in A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow (x \subset A \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in C). \end{aligned}$$

Si $x \in C$, *alors on a fini. Si* $x \in A$, *alors*

$$(x \in A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap C) \Rightarrow (x \in C),$$

donc $x \in C$, *d'où* $B \subset C$.

Solution 10.

(1) *Soit la relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

- *Soit* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, *alors* $y_1 = y_1 \Leftrightarrow (x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)$, *donc* $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*
- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow y_2 = y_1 \Leftrightarrow (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1),$$

  alors $\mathcal{R}$ *est une relation symétrique.*
- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3)] &\Rightarrow [y_1 = y_2 \text{ et } y_2 = y_3] \\ &\Rightarrow [y_1 = y_3] \\ &\Rightarrow (x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3), \end{aligned}$$

  donc $\mathcal{R}$ *est une relation transitive.*

On déduit que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *La classe d'équivalence de* $(1, 0)$, *on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((1,0)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\,\mathcal{R}\,(1, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\} = \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

(3) *Soit la relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

- *Soit* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_1, y_1)$, *alors* $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*
- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) &\Leftrightarrow \left(x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2\right) \\ &\Leftrightarrow (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation symétrique.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} \left[(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3)\right] &\Rightarrow \left[x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \text{ et } x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2\right] \\ &\Rightarrow \left[x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2\right] \\ &\Leftrightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation transitive.*

On déduit que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence, pour la classe d'équivalence de* $(1,0)$, *on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((1,0)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \mathcal{R} (1,0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}. \end{aligned}$$

Solution 11.

(1) *Soit* $\mathcal{R}$ *la relation définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :*

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / n = km.$$

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$n\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : n = 1n.$$

c'est-à-dire $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*

- *Soit* $n, m \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} [n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}n] &\Leftrightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m) \text{ et } (\exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2 n)] \\ &\Rightarrow (\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 k_2 n) \\ &\Rightarrow (\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : k_1 k_2 = 1) \\ &\Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \\ &\Rightarrow n = m, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation anti-Symétrique.*

- *Soit* $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} [n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}p] &\Leftrightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m) \text{ et } (\exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2 p)] \\ &\Rightarrow \left(\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : n = \underbrace{k_1 k_2}_{k_3} p\right) \\ &\Rightarrow (\exists k_3 = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^* : n = k_3 p) \\ &\Rightarrow n\mathcal{R}p, \end{aligned}$$

don $\mathcal{R}$ *est une relation transitive.*

(2) *La relation d'ordre* $\mathcal{R}$ *est partiel, il existe* $n = 2 \in \mathbb{N}^*$ *et* $m = 3 \in \mathbb{N}^*$, *tel que*

$$\text{ni } 2\mathcal{R}3 \qquad \text{ni } 3\mathcal{R}2.$$

Solution 12.

(1) *Dans* $\mathbb{R}^2$ *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

- *Soit* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\cos^2(x_1) + \sin^2(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_1|.$$

donc $(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)$, *ce qui signifie* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) &\Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2| \\
&\Leftrightarrow 1 - \sin^2(x_1) + 1 - \cos^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_1| \\
&\Rightarrow \cos^2(x_2) + \sin^2(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_1| \\
&\Rightarrow (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est Symétrique.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3) &\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|. \\ \cos^2(x_2) + \sin^2(x_3) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_3|. \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) \\ + \cos^2(x_2) + \sin^2(x_3) = 2 \\ |y_1| = |y_2| = |y_3| \end{cases} \\
&\Rightarrow \cos^2(x_1) + 1 + \sin^2(x_3) = 2 \text{ et } |y_1| = |y_3| \\
&\Rightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_3) = 1 \text{ et } |y_1| = |y_3| \\
&\Rightarrow (x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*

(2) *La classe d'équivalence de* $(0, 0)$, *on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}((0,0)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\,\mathcal{R}\,(0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos^2(x) = 1 \text{ et } y = 0\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = \pi k : k \in \mathbb{Z}) \text{ et } y = 0\right\} \\
&= \{(\pi k, 0) : k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Solution 13.

(1) *On a*

- *L'application v est injective, soit $n, m \in \mathbb{N}$, tels que*

$$v(n) = v(m) \Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow |n| = |m| \Rightarrow n = m, \text{ car } n, m \in \mathbb{N}.$$

- *L'application v n'est pas surjective, car $2 \in \mathbb{N}$ et $v(n) = 2 \Rightarrow n^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.*
- *L'application i est injectiv, soit $n, m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned}(i(n) = i(m)) &\Rightarrow \left(2n^2 - 7 = 2m^2 - 7\right)\\ &\Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow |n| = |m|\\ &\Rightarrow n = m, \text{ car } n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

- *L'application i n'est pas surjective, car $9 \in \mathbb{Z}$ et $i(n) = -9 \Leftrightarrow 2n^2 = -2 \Rightarrow n^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, donc i n'est pas surjective.*
- *L'application k n'est pas injective, comme $k(-1) = k(1) = 9$ et $-1 \neq 1$.*
- *L'application k n'est pas surjective, car $6 \in \mathbb{N}$ et $k(n) = 6 \Leftrightarrow n^2 = \frac{1}{4}$, n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.*
- *L'application f n'est pas injective, car $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.*
- *L'application f est surjective. En effet, soit $y \in [0,1]$. On a*

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2},$$

alors

$$y \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{1-y^2} \leq 1 \\ -1 \leq \sqrt{1-y^2} \leq 0 \end{cases}$$

donc il existe $x \in [-1,1]$.

- *L'application g est injective. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, on a*

$$\begin{aligned}g(x_1) &= g(x_2) \Rightarrow \frac{2-x_1}{x_1+3} = \frac{2-x_2}{x_2+3}\\ &\Rightarrow (2-x_1)(x_2+3) = (2-x_2)(x_1+3)\\ &\Rightarrow 6 - 3x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 6 - 3x_2 + 2x_1 - x_1x_2\\ &\Rightarrow 5x_2 = 5x_1 \Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

- *L'application g n'est pas surjective, car $-1 \in \mathbb{R}$ et $g(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.*
- *L'application h est injective. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$\begin{aligned}h(x_1) &= h(x_2) \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow e^{\ln x_1} = e^{\ln x_2}\\ &\Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

- *L'application h est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, alors*

$$h(x) = y \Rightarrow \ln(x) = y \Rightarrow x = e^y \in \mathbb{R}_+^*.$$

(2) *Calculer $v \circ k$, $i \circ k$, $k \circ i$.*

- *On a* $v \circ k : \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{v} \mathbb{N}$, *donc*

$$n \to (v \circ k)(n) = v\left(4n^2 + 5\right) = \left(4n^2 + 5\right)^2.$$

- *On a* $i \circ k : \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, *donc*

$$n \to (i \circ k)(n) = i\left(4n^2 + 5\right) = 2\left(4n^2 + 5\right)^2 - 7.$$

- *On a* $k \circ i : \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N}$, *donc*

$$n \to (k \circ i)(n) = k\left(2n^2 - 7\right) = 4\left(2n^2 - 7\right)^2 + 5.$$

(3) *Soit* $u :]1, \infty[\to]0, \infty[$ *définie par :* $u(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

- *L'application u est injective. Soit* $x_1, x_2 \in]1, \infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} (u(x_1) = u(x_2)) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1}\right) \\ &\Rightarrow (x_1 - 1 = x_2 - 1) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- *L'application u est surjective. Soit* $y \in]0, +\infty[$, *alors*

$$u(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y} \in]1, +\infty[,$$

car

$$y \in]0, +\infty[\Leftrightarrow \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} > 1.$$

donc l'application u est bijective, avec $u^{-1} :]0, \infty[\to]1, +\infty[$ *définie par :*

$$u^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Solution 14.

(1) *L'application f n'est pas injective, car* $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$. *On a*

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x = 2\left(x^2 + 1\right) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

Comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est surjective.

(2) *L'application g est injective. Soit* $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, *on a*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow 2x_1\left(1 + x_2^2\right) = 2x_2\left(1 + x_1^2\right) \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2) - x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 = x_2 \text{ ou } x_1x_2 = 1), \end{aligned}$$

si $x_1x_2 = 1$ et $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, on a

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

ce qui entraîne que $x_1 = x_2 = 1$ *ou* $x_1 = x_2 = -1$, *c'est-à-dire que* $x_1 = x_2$, *ainsi*

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

L'application g *est surjective. Soit* $y \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, *alors*

$$\begin{aligned}(f(x) = y) &\Leftrightarrow \left(y\left(1 + x^2\right) = 2x\right) \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0.\end{aligned}$$

Si $y \in [-1, 1]$, *alors* $1 - y^2 \geq 0$, *comme* $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0$, *alors l'equation* $yx^2 - 2x + y = 0$ *admet deux solutions*

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \qquad ou \qquad x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}, \qquad avec\ y \neq 0.$$

La seule solution acceptée $x \in [-1, 1]$ *est* $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$, *car, si* $y = \frac{1}{2}$, *alors* $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} = 2 + \sqrt{3} \notin [-1, 1]$.
Si $y = 0$, *alors* $x = 0$. *Donc* g *est une bijection.*

Solution 15.

(1) *La fonction* f *est injective. Soit* $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}[f(x_1) = f(x_2)] &\Rightarrow (\sqrt{x_1} + 1)^2 - 1 = (\sqrt{x_2} + 1)^2 - 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{x_1} + 1)^2 = (\sqrt{x_2} + 1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} + 1 = \sqrt{x_2} + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

La fonction f *est surjective. Soit* $y \in [0, +\infty[$, *alors*

$$\begin{aligned}[y = f(x)] &\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = y + 1.\end{aligned}$$

Comme $y \in [0, +\infty[$, *alors l'équation* $(\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1 > 1$ *admet des solution*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = y + 1 &\Leftrightarrow \left|\sqrt{x} + 1\right| = \sqrt{y + 1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{y + 1},\end{aligned}$$

car $\sqrt{x} + 1 > 0$, *donc*

$$\sqrt{x} = \sqrt{y + 1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{y + 1} - 1\right)^2 \geq 0,$$

alors

$$x = \left(\sqrt{y + 1} - 1\right)^2 \in [0, \infty[.$$

(2) *La fonction réciproque* $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *est donnée par :*

$$f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + 1} - 1\right)^2 = x + 2 - 2\sqrt{1 + x}, \quad \forall x \in [0, \infty[.$$

3 | Les fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Définitions générales

Définition 3.1.1. *On appelle fonction numérique sur un ensemble D tout procédé qui, à tout élément x de D, permet d'associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de D qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f, noté D_f*

Exemple 3.1.1. *La fonction $f : x \to \sqrt{x-1}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x - 1 \geq 0$. Donc $D_f = [1, +\infty[$.*

3.1.2 Graphe d'une fonction

Définition 3.1.2. *On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f définie sur un intervalle $D_f \subset \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$C_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

formé des points $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repère orthonormé $\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

3.1.3 Fonctions bornées, fonction monotones

Définition 3.1.3. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

a) f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M$.

b) f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \geq m$.

c) f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si $\exists M > 0, \forall x \in D : |f(x)| \leq M$.

Définition 3.1.4. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

a) f est croissante sur D si $\forall x, y \in D$, $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

b) f est strictement croissante sur D si $\forall x, y \in D$, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

c) f est décroissante sur D si $\forall x, y \in D$, $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

d) f est strictement décroissante sur D si $\forall x, y \in D$, $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

e) f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.

Exemple 3.1.2.

i) *Les fonctions exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante.*

ii) *La fonction valeur absolue* $x \to |x|$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *n'est pas monotone.*

3.1.4 Fonction paire, impaire, périodique

Définition 3.1.5. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *symétrique par rapport à* 0*. Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

i) f *est paire si* $\forall x \in I : f(-x) = f(x)$.

ii) f *est impaire si* $\forall x \in I : f(-x) = -f(x)$.

Exemple 3.1.3.

i) *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est paire.*

ii) *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est impaire.*

Définition 3.1.6. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* T *un nombre réel,* $T > 0$*. La fonction* f *est dite périodique de période* T *si*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x).$$

Exemple 3.1.4. *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont* 2π*-périodiques. La fonction tangente est* π*-périodique.*

3.1.5 Opérations algébriques sur les fonctions

L'ensemble des fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.7. *Soient* f *et* $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On définit*

- Somme de deux fonctions $f + g : x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda f : x \to (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Produit de deux fonctions $fg : x \to (fg)(x) = f(x)\, g(x)$.

Remarque. *Les fonctions* $f+g$*,* λf *et* fg *sont des fonctions appartenant à* $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$*.*

Définition 3.1.8. *Soient* f *et* $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On dit que*

- $f \leq g$ *si* $\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)$.
- $f < g$ *si* $\forall x \in D,\ f(x) < g(x)$.

Exemple 3.1.5. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $]0,1[$ *par* $f(x) = x$, $g(x) = x^2$*. On a* $g < f$*, car* $\forall x \in \,]0,1[\,,\ x^2 < x$.

3.2 Limite d'une fonction

3.2.1 Définition générales

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 3.2.1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a ℓ pour limite en x_0 si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit dans ce cas, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple 3.2.1. *Considérons la fonction $f(x) = 2x - 1$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Au point $x = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$, si l'on a, à fortiori, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Le bon choix sera alors de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.*

Unicité de la limite

Proposition 3.2.1. *Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.*

Démonstration. Si f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0, alors on a, par définition, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in I, \text{ si } |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in I, \text{ si } |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, alors

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, pour $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ entraine que $\ell_1 = \ell_2$. □

Limite à droite, limite à gauche

Définition 3.2.2. *On dit que la fonction f admet ℓ comme limite à droite de x_0, ou encore quand x tend vers x_0^+, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que : $x_0 < x < x_0 + \delta$, entraine $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrira, dans ce cas :*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

On dit que la fonction f admet ℓ comme limite à gauche de x_0, ou encore quand x tend vers x_0^-, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que : $x_0 - \delta < x < x_0$, entraine $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrira, dans ce cas :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Exemple 3.2.2. *La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ tend vers 0 lorsque $x \to 0^+$.*

Remarque. *Si la fonction f admet une limite ℓ à gauche du point x_0 et une limite ℓ' à droite de x_0, pour que f admet une limite au point x_0 il faut et il suffit que $\ell = \ell'$.*

Exemple 3.2.3. *Considérons la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \geq 0, \\ -1, & si\ x < 0. \end{cases}$$

Elle admet 1 *comme limite à droite de* 0 *et* -1 *comme limite à gauche de* 0. *Mais elle n'admet aucune limite au point* 0.

Cas où x devient infini

On posera par définition

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \text{tel que} \quad x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \text{tel que} \quad x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Limite infinie

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On posera par définition

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

Si $x_0 = +\infty$ où $x_0 = -\infty$, on posera

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x < -B \Rightarrow f(x) > A.$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x > B \Rightarrow f(x) < -A.$$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$$

3.2.2 Théorèmes sur les limites

Théorème 3.2.1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a, b[$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,

(2) *Pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in]a, b[$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Démonstration. Condition nécessaire : Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$. Ceci s'écrit, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|x - x_0| \leq \delta$. En récapitulant, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie bien que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
Condition suffisante : Supposons que ℓ n'est pas limite de f en x_0. La négation de la définition de la limite nous donne

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in [a, b], \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [a, b]$, tel que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - \ell| > \varepsilon.$$

Donc, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet x_0 comme limite, cependant, ℓ n'est pas limite de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. □

Exemple 3.2.4. *La fonction* $f : x \in \mathbb{R}^* \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite au point* 0. *En effet, considérons les suites*

$$x_n = \frac{1}{(n+1)\pi} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a $x_n \to 0$ *et* $y_n \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$, *comme*

$$\sin(x_n) = \sin((n+1)\pi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

alors les deux limites sont différentes, donc f *n'admet pas de limite au point* 0.

3.2.3 Opérations sur les limites

Théorème 3.2.2. *Soit* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a, b[$, *tel que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, *Alors*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \ell$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell \ell'$.

d) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

e) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0$.

f) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$, *si* $\ell' \neq 0$.

Théorème 3.2.3. *Soient* $f : [a,b] \to [c,d]$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$, $y_0 \in [c,d]$, *tel que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad et \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$$

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$.

Proposition 3.2.2. *Soit* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$, *on a*

a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

c) Si $f \leq g$, et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

d) Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Théorème 3.2.4. *Soit* $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$, *on a*

i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, *pour tout* $x \in]a,b[$,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Remarque. *Voici une liste de formes indéterminées*

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \times +\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad 1^{\infty}, \qquad \infty^0.$$

3.3 Continuité d'une fonction

3.3.1 Définition générales

Définition 3.3.1. *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$, I *étant un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On dit que* f *est continue au point* $x_0 \in I$ *si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad si\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemple 3.3.1. *Soit la fonction réelle* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & si\ x \neq 0, \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$*, on a*

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Pour $\varepsilon > 0$*, on choisira* $\delta = \varepsilon$*. Ainsi*

$$|x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc f *est continue au point* $x_0 = 0$*.*

Définition 3.3.2. *Une fonction définie sur un intervalle* I *est continue sur* I *si elle est continue en tout point de* I*. L'ensemble des fonctions continues sur* I *se note* $\mathcal{C}(I)$*.*

Continuité à gauche, continuité à droite

Définition 3.3.3. *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*,* I *étant un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

(1) *La fonction* f *est dite continue à gauche en* x_0 *si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \text{si } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(2) *La fonction* f *est dite continue à droite en* x_0 *si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \text{si } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Remarque. *La fonction* f *est continue en* x_0 *si et seulement si* f *est continue à gauche et à droite du point* x_0*.*

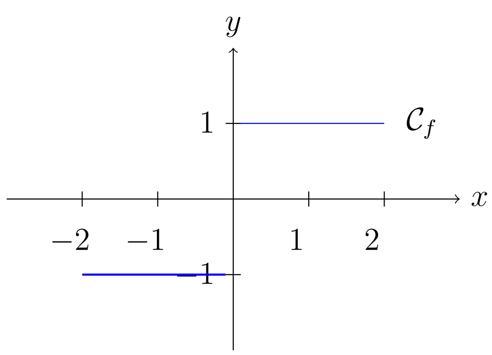
$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 3.3.2. *La fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$*. Au point* $x_0 = 0$*, la fonction* f *est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite car*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0).$$



Prolongement par continuité

Définition 3.3.4. *Soit I un intervalle, x_0 un point de I. Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in I$ et qu'elle admet en ce point une limite finie notée ℓ, la fonction définie par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0, \\ \ell & si\ x = x_0. \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple 3.3.3. *La fonction*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$|f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Le prolongement par continuité de f au point 0 est donc la fonction $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

3.3.2 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 3.3.1. *Soit I un intervalle, et f et g des fonctions définies sur I et continues en $x_0 \in I$. Alors*

(1) *λf est continue en x_0, $(\lambda \in \mathbb{R})$.*

(2) *$f + g$ est continue en x_0.*

(3) *fg est continue en x_0.*

(4) *$\dfrac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) est continue en x_0.*

Continuité de la fonction composée

Théorème 3.3.2. *Soit deux fonctions $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, tels que I, J deux intervalles quelconques de $\mathbb{R}$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $y_0 = f(x_0) \in J$, alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.*

3.4 Fonction dérivable

3.4.1 Définition et propriétés

Définition 3.4.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est fini. Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

Remarque. *En posant $x = x_0 + h$, on a*

$$f^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

On peut encore écrire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf^{'}(x_0) + h\varepsilon(h), \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Exemple 3.4.1. *Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La dérivée de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est*

$$\begin{aligned} f^{'}(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 + 2x_0h}{h} = \lim_{h\to 0} h + 2x_0 = 2x_0. \end{aligned}$$

Définition 3.4.2. *La fonction qui à tout x de I associe $f^{'}(x)$ dans $\mathbb{R}$ s'appelle fonction dérivée de f et se note $f^{'}$ ou $\dfrac{df}{dx}$.*

Proposition 3.4.1. *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Démonstration. Si f est dérivable au point x_0, alors pour tout $h > 0$, il existe $\varepsilon(h)$ tel que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf^{'}(x_0) + h\varepsilon(h), \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

D'où

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

□

3.4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 3.4.3. *La dérivée f' de $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction sur l'intervalle I. Si f' est dérivable à son tour, sa dérivée notée $f^{''} = \left(f^{'}\right)^{'}$ est dite dérivée seconde de f. Cette notion se généralise à l'ordre n. Ainsi la dérivée d'ordre n de f est définie par*

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)^{'}(x).$$

Exemple 3.4.2. *Soit la fonction $f(x) = \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Les dérivées d'ordre 1 et 2 sont*

$$f^{'}(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad f^{''}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Par récurrence la dérivée d'ordre n de f est

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 3.4.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction définie sur l'intervalle I est de calasse $\mathcal{C}^n$ ou n fois continument dérivable si elle est n fois dérivables et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On notera $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de calasse $\mathcal{C}^n$.*

Définition 3.4.5. *On dit qu'une fonction est de calasse $\mathcal{C}^0$ si elle est continue sur I, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle indéfiniment dérivable sur I (c'est-à-dire $f^{(n)}$ existe pour tout n).*

Exemple 3.4.3. *La fonction $x \to |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, car n'est pas dérivable à l'origine.*

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 3.4.6. *On dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.
On dit que la fonction f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

Notation. *On note, dans ce cas :*

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \textit{et} \qquad f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque. *La dérivée de f au point x_0 existe si et seulement si $f_d'(x_0)$ et $f_g'(x_0)$ existent et sont égales*

$$f \textit{ est dérivable au point } x_0 \Leftrightarrow f_d'(x_0) = f_g'(x_0) = f'(x_0).$$

Définition 3.4.7. *Si les dérivées à gauche et à droite existent et sont différentes, ils existent alors deux demi-tangentes à la courbe C_f au point $(x_0, f(x_0))$ dit point anguleux.*

Exemple 3.4.4. *Considérons la fonction $f(x) = |x^2 - x|$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Elle admet deux points anguleux, à savoir l'origine $(0,0)$ et le point $(1,0)$.*

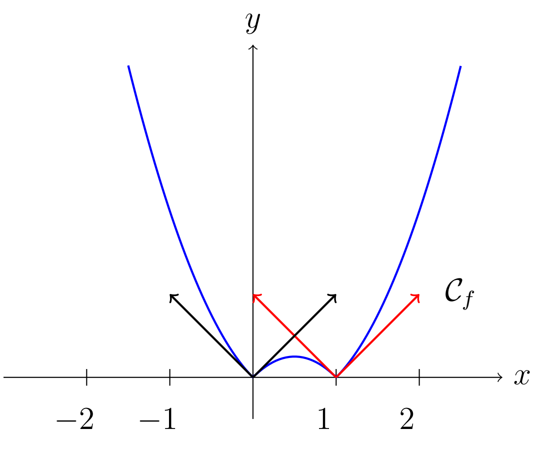
- *Au point $(0,0)$ on a*

$$f_g'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} x - 1 = -1 \quad \textit{et} \quad f_d'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} 1 - x = 1.$$

- *Au point $(1,0)$ on a*

$$f_g'(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x = -1 \quad \textit{et} \quad f_d'(1) \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x = 1.$$

A l'origine on a deux demi-tangentes, à savoir, $y = x$ et $y = -x$. Au point $(1,0)$, on a aussi deux demi-tangentes d'équations : $y = x - 1$ et $y = -x + 1$.



3.4.3 Opérations de dérivations

Théorème 3.4.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si les fonctions f et g sont dérivables en x_0, alors*

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αf *est dérivable en x_0 et on a*

$$(\alpha f)^{'}(x_0) = \alpha f^{'}(x_0).$$

(2) $f+g$ *est dérivable en x_0 et on a*

$$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0).$$

(3) fg *est dérivable en x_0 et on a*

$$(f.g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g^{'}(x_0).$$

(4) *Si $g^{'}(x) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g^{'}(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{'}(x_0) = \frac{-g^{'}(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème 3.4.2. *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et g dérivable en $f(x_0) \in J$, la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)\, g^{'}(f(x_0)).$$

Dérivée de la fonctions réciproque

Théorème 3.4.3. *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection continue. L'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue sur J. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f^{'}(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ tel que*

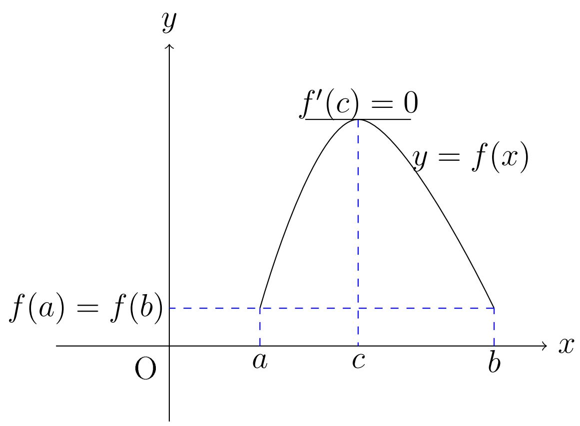
$$\left(f^{-1}\right)^{'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Fonction f	Dérivée f'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

3.4.4 Théorème de Rolle

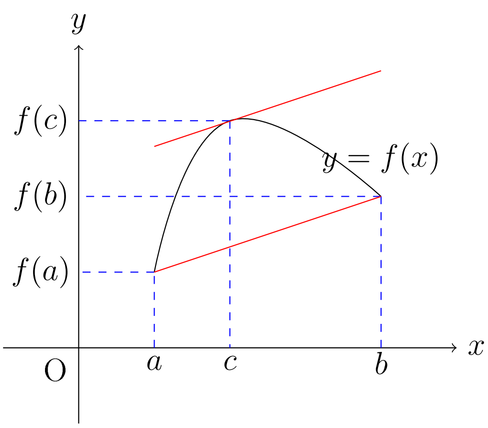
Théorème 3.4.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*



Théorème des accroissements finis

Théorème 3.4.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'aprés le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Exemple 3.4.5. *Montrons que* $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, $x > 0$. *Posons* $f(t) = \sqrt{1+t}$, *alors* $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ *et* $f(0) = 1$. *Pour tout* $x > 0$, *on applique la formule des accroissements finis à l'intervalle* $[0, x]$, *il existe* $c \in]0, x[$, *tel que*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Ce qui donne la résultat.

Corollaire 3.4.1. *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $]a, b[$, *on a*

(1) $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$ *si et seulement si* f *est constante sur* $]a, b[$.

(2) *Si* $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ *(resp* $f'(x) > 0$*), alors* f *est croissante (resp strictement croissante) .*

(3) *Si* $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$ *(resp* $f'(x) < 0$*), alors* f *est décroissante (resp strictement décroissante) .*

Théorème des accroissements finis généralisés

Théorème 3.4.6. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur l'intervalle* $[a, b]$ *et dérivables sur* $]a, b[$ *telles que* $g'(x) \neq 0$ *sur cet intervalle et* $g(a) \neq g(b)$. *Il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)].$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'aprés le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Règle de l'hôpital

Théorème 3.4.7. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$, et tendant vers 0 toutes les deux pour $x \to a^+$. On suppose que $g^{'}(x)$ ne s'annule pas dans un voisinage de a et que $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \ell$. Dans ces conditions*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \ell$$

Aussi, ce résultat vaut que ℓ soit un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque. *Le théorème reste valable quand f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$, et tendant vers 0 toutes les deux pour $x \to b^-$.*

Théorème 3.4.8. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g^{'}(x)$ ne s'annule pas dans $]a,b[$ et si $\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ admet une limite ℓ au point $x_0 \in \left]a,b\right[$, alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \ell.$$

Démonstration. Le Théorème des accroissements généralisés appliqué sur $[x_0, x]$ donne

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f^{'}(c_x)}{g^{'}(c_x)}, \quad \text{avec} \quad c_x \in \left]x_0, x\right[.$$

Si $x \to x_0$, alors $c_x \to x_0$, par suite $\frac{f^{'}(c_x)}{g^{'}(c_x)} \to \ell$, autrement dit

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \to \ell \quad \text{lorsque} \quad x \to x_0.$$

□

Exemple 3.4.6. *Soit la fonction φ définie par*

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln x}, \quad \forall x \in \left]0,2\right[$$

Posons $f(x) = \ln(x^2+x-1)$ et $g(x) = \ln(x)$, alors $f(1) = 0$, $f^{'}(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$, $g(1) = 0$ et $g^{'}(x) = \frac{1}{x}$. On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x}{x^2+x+1} = 1,$$

d'après la règle de l'hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln x} = 1.$$

3.4.5 Fonctions équivalentes

Définition 3.4.8. *Soit f, g deux fonction définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en x_0. On dit que f est équivalente à g lorsque $x \to x_0$ (ou en x_0), et l'on note $f \sim g$, si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 3.4.7. *Soit P un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Alors

$$P(x) \sim a_n x^n \text{ au voisinage de } +\infty.$$

En effet,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} = 1.$$

Proposition 3.4.2. *Soit f_1, g_1, f_2 et g_2 des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.*

(2) *Si $f_1 \sim g_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x_0) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x_0) = l$.*

Équivalents classiques au voisinage de 0

$$e^x - x \sim x, \quad \sin(x) \sim x, \quad \tan(x) \sim x,$$
$$1 - \cos(x) \sim \tfrac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha - x \sim x.$$

3.5 Exercices

3.5.1 Énoncés

Exercice 16. *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

$$(1)\ f_1(x) = \frac{x+1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}, \quad (2)\ f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}, \quad (3)\ f_3(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \sqrt{x^2 - 1}, \quad (4)\ f_4(x) = (1 + \ln(x))^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 17. *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes*

$$(1)\ \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (2)\ \lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (3)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)},$$
$$(4)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}, \quad (5)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \tan(x)}, \quad (6)\ \lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, a > 0,$$
$$(7)\ \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad (8)\ \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{x}\right), \quad (9)\ \lim_{x \to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

Exercice 18. *A l'aide des équivalences, calculer les limites suivantes*

$$(1)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln(x)}{\sin(2x)}, \quad (2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad (3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2}, n \neq m,$$
$$(4)\ \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right), \quad (5)\ \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Exercice 19. *Soient f, g deux fonctions définies par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

- *Etudier la continuité de f et g.*

Exercice 20. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = \ln(3+\sin(x)), \quad f_2(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad f_3(x) = \ln\left(\tfrac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right),$$
$$f_4(x) = x^{x+1}, \quad f_5(x) = \sin\left((e^x)^2\right), \quad f_6(x) = x^{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Exercice 21. *Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée lorsqu'elle existe :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & si\ x \leq 0, \\ \sin(x), & si\ 0 < x \leq \pi, \\ 1+\cos(x), & si\ x > \pi. \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} e^x - 1, & si\ x < 0, \\ 0, & si\ x = 0, \\ x\ln(x) - x, & si\ x > 0. \end{cases}$$

Exercice 22. *En utilisant la formule de l'Hôpital, calculer les limites suivantes*

$$(1) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{e^x - 1}, \quad (2) \lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}, \quad (3) \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x^2 - \pi^2}, \quad (4) \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

3.5.2 Correction des exercices

Solution 16.

L'ensemble de définition des fonctions :

(1) $\mathcal{D}_{f_1} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \ et\ 1 - e^{\frac{1}{x}} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^*$.

(2) $\mathcal{D}_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\, , k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

(3) $\mathcal{D}_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \neq 0 \ et\ x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$.

(4) $\mathcal{D}_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \ln(x) > 0 \ et\ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > e^{-1} \ et\ x > 0\} =]e^{-1}, +\infty[$.

Solution 17.

(1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a* $0 \leq \left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, *et* $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, *donc* $\lim\limits_{x\to 0} \left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = 0$, *par conséquence* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

(2) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose* $y = \dfrac{1}{x}$, *lorsque* $x \to +\infty$, $y \to 0^+$, *alors*

$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

(3) *On sait que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = 1$, *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - 2\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)}{x\left(1 + 3\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\dfrac{\sin(2x)}{2x}}{1 + 3\dfrac{\sin(3x)}{3x}} = -\frac{1}{4}.$$

(4) *On sait que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, *alors*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

(5) *On a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos(x)\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(x)-\sin(x)}\\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(6)

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(7) *On sait que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$, *pour* $y=\dfrac{1}{x}$, *lorsque* $x\to+\infty$, $y\to 0^+$, *alors*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0^+}\exp\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)=e.$$

(8) *Pour tout* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, *on a* $\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, *alors*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\sqrt{x+1}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}2\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0,\end{aligned}$$

car

$$\left|\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\right|\le 1,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\quad \textit{et}\quad \lim_{x\to+\infty}2\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=0.$$

(9) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *on pose* $y=x-1$, *lorsque* $x\to 1$, $y\to 0$, *alors*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \lim_{y\to 0}-y\tan\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to 0}-y\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}\\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\\ &= \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Solution 18.

(1) *On sait que* $\sin(2x)\sim 2x$, *si* $x\to 0$, *alors* $\dfrac{x\ln(x)}{\sin(2x)}\sim\dfrac{1}{2}\ln x$, $x\to 0$, *par passage à la limite on trouve*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln(x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\ln x=-\infty.$$

(2) *On sait que* $\ln(1+x^2) \sim x^2$ *et* $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}$, *si* $x \to 0$, *alors* $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \sim 2x$, $x \to 0$,

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = 0.$$

(3) *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a* $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, *alors*

$$\cos(mx) - \cos(nx) = -2\sin\left(\frac{m-n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+m}{2}x\right)$$

On sait que $\sin\left(\frac{n-m}{2}x\right) \sim \frac{n-m}{2}x$ *et* $\sin\left(\frac{n+m}{2}x\right) \sim \frac{n+m}{2}x$, *si* $x \to 0$, *alors*

$$\cos(mx) - \cos(nx) \sim -2\left(\frac{m-n}{2}\right)\left(\frac{n+m}{2}\right)x^2, \quad x \to 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(n^2 - m^2\right).$$

(4) *On sait que* $e^x - 1 \sim x$, *si* $x \to 0$, *alors* $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$, *si* $x \to +\infty$, *donc* $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \sim 1$, $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1.$$

(5) *On sait que* $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$, *si* $x \to 0$, *alors* $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim 1 + \frac{1}{2x}$, *si* $x \to +\infty$, *donc* $x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim x + \frac{1}{2}$, $x \to +\infty$, *d'où*

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{2} = +\infty.$$

Solution 19.

(a) *Si* $x \neq 0$, *la fonction* f *est continue. Les définitions des limites à gauche et à droite au point* $x_0 = 0$, *nous donne*

$$f_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

$$f_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

On a utilisé le fait que $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ *et* $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, *comme* $f_g(0) = f_d(0) = f(0) = 0$, *alors* f *est continue au point* $x_0 = 0$.

(b) *Si* $x \neq 0$, *la fonction* g *est continue. Les définitions des limites à gauche et à droite au point* $x_0 = 0$, *nous donne*

$$g_d(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\frac{\ln(1+y)}{y} = 0,$$

$$g_g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} \frac{e^y}{y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{ye^{-y}} = 0.$$

Comme $g_g(0) = g_d(0) = g(0) = 0$, *alors* g *est continue au point* $x_0 = 0$.

Solution 20.

Les dérivées des fonctions

(1) *On a*

$$f_1'(x) = \frac{\cos(x)}{3+\sin(x)}.$$

(2) *On a*

$$f_2'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(3) *On a*

$$f_3(x) = \ln(2+\cos(x)) - \ln(2-\cos(x)), \ \textit{car } 2-\cos(x) > 0 \ \textit{et } 2+\cos(x) > 0,$$

donc

$$f_3'(x) = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)} = \frac{-4\sin(x)}{(2+\cos(x))(2-\cos(x))} = \frac{-4\sin(x)}{4-\cos^2(x)}.$$

(4) *On a*

$$f_4(x) = x^{x+1} = e^{\ln\left(x^{x+1}\right)} = e^{(x+1)\ln(x)},$$

donc

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= ((x+1)\ln(x))' \, e^{(x+1)\ln(x)} = \left(\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right) e^{(x+1)\ln(x)} \\ &= \left(\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right) x^{x+1}. \end{aligned}$$

(5) *On a*

$$f_5(x) = \sin\left((e^x)^2\right) = \sin\left(e^{2x}\right),$$

donc

$$f_5'(x) = 2e^{2x}\cos\left(e^{2x}\right).$$

(6) *On a*

$$f_6(x) = x^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{\sin(x)}{x}}\right)} = e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)},$$

donc

$$f_6'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)\right)' e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)},$$

Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)\right)' &= \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' \ln x + \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{x} \\ &= \frac{x\cos(x)\ln x + (1-\ln x)\sin(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \left(\frac{x\cos(x)\ln x + (1-\ln x)\sin(x)}{x^2}\right) x^{\frac{\sin(x)}{x}} \\ &= (x\cos(x)\ln x + (1-\ln x)\sin(x))\, x^{\frac{\sin(x)}{x}-2}. \end{aligned}$$

Solution 21.

- *La fonction f est continue et dérivable sur* $]-\infty, 0[\,, \,]0, \pi[$ *et* $]\pi, +\infty[$.
- *Pour $x_0 = 0$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$. On a*
$$f_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + x = 0,$$
$$f_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) = 0,$$
Alors $f_g(0) = f_d(0) = f(0)$, donc f est continue en $x_0 = 0$.
- *On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = 0$. On a*
$$f_g'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x + 1 = 1.$$
$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$
Comme $f_g'(0) = f_d'(0) = 1$, alors la fonction f est dérivable en $x_0 = 0$.
- *Pour $x_0 = \pi$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = \pi$, alors*
$$f_g(\pi) = \lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \sin(x) = 0,$$
$$f_d(\pi) = \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} 1 + \cos(x) = 0,$$
Alors $f_g(\pi) = f_d(\pi) = f(\pi)$, donc f est continue en $x_0 = \pi$.
- *On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = \pi$, alors*
$$f_g'(\pi) = \lim_{x\to \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{-\sin(y)}{y} = -1.$$
$$\begin{aligned} f_d'(\pi) &= \lim_{x\to \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{1 + \cos(x)}{x - \pi} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1 + \cos(y + \pi)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0^+} y\left(\frac{1 - \cos(y)}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{2} = 0, \end{aligned}$$
Comme $f_g'(\pi) \neq f_d'(\pi)$, alors la fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = \pi$.
- *La fonction g est continue et dérivable sur* $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$.
- *Pour $x_0 = 0$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, on a*
$$g_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x - 1 = 0,$$
$$g_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) - x = 0,$$
Alors $g_g(0) = g_d(0) = g(0)$, donc g est continue en $x_0 = 0$.
- *On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, nous avons*
$$g_g'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$
$$g_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) - 1 = -\infty,$$
Comme $g_d'(0) = -\infty$, alors la fonction g n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Solution 22.

(1) *La limite de* $\frac{1-\cos(x)}{e^x-1}$ *en* 0 *est indéterminée, on regarde la limite du quotient des dérivées du numérateur et du dénominateur*

$$\frac{(1-\cos(x))'}{(e^x-1)'} = \frac{\sin(x)}{e^x}$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{e^x} = 0.$$

(2) *La limite de* $\frac{x^x-1}{\ln x - x + 1}$ *en* 1 *est indéterminée, on a*

$$\frac{(x^x-1)'}{(\ln x - x+1)'} = \frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)'}{\frac{1}{x}-1} = \frac{x(1+\ln x)\,x^x}{1-x}.$$

donc

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-1}{\ln x - x+1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x(1+\ln x)\,x^x}{1-x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^x-1}{\ln x - x+1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x(1+\ln x)\,x^x}{1-x} = +\infty.$$

(3) *La limite de* $\frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}$ *en* π *est indéterminée, on a*

$$\frac{(\sin(x))'}{(x^2-\pi^2)'} = \frac{\cos(x)}{2x},$$

donc

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2} = \lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x)}{2x} = \frac{\cos(\pi)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}.$$

(4) *La limite de* $\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ *en* 0 *est indéterminée, on a*

$$\frac{(x\cos(x)-\sin(x))'}{(x^2)'} = \frac{-x\sin(x)}{2x} = -\frac{\sin(x)}{2},$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{2} = 0.$$

4 | Application aux fonctions élémentaires

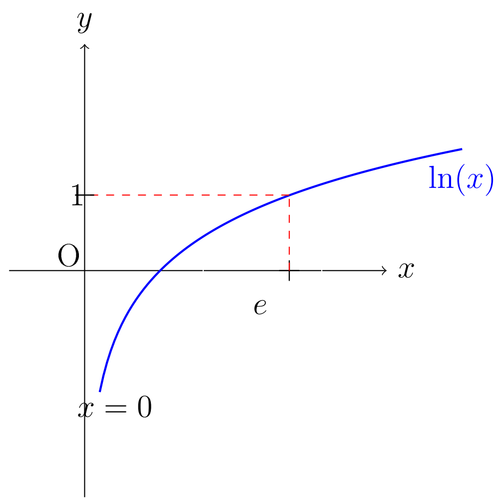
4.1 Fonction logarithme, fonction exponentielle et fonction puissance

4.1.1 Fonction Logarithm

Définition 4.1.1. *On appelle logarithme népérien et on note* ln *l'unique primitive s'annulant en* 1 *de la fonction* $x \to \frac{1}{x}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$*,*

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Remarque. *La fonction* $x \to \ln(x)$ *est continue, strictement croissante et définit une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$*.*



Propriétés des logarithmes

Soient a et b des réels strictement positifs, et α est un réel :

- Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- Quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- Puissance : $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$
- Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $\ln(a) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$ et $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Limites particulières

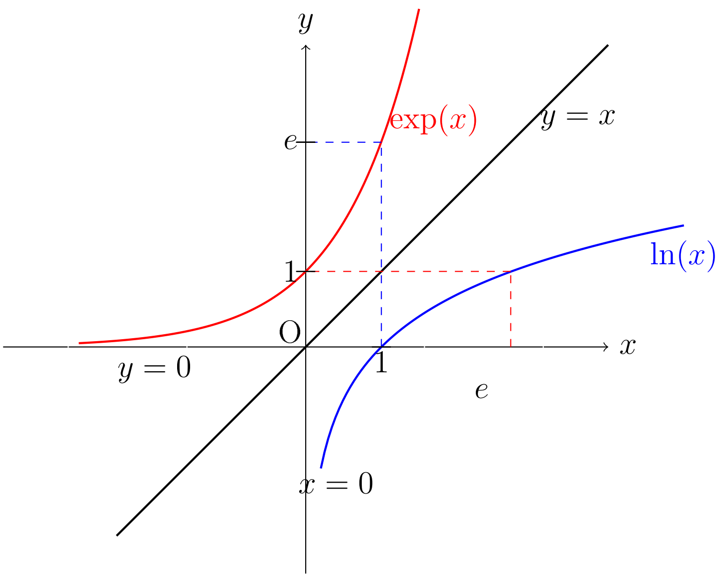
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

4.1.2 Fonction exponentielle

Définition 4.1.2. *La fonction réciproque de* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *s'appelle la fonction exponentielle, notée* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *ou* $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. *est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, où*

$$(\exp x)' = \exp x, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$



Propriétés des exponentielles

Soient a, b et n des réels :

- Produit : $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- Inverse : $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
- Quotient : $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- Puissance : $(e^a)^n = e^{na}$

Lien exponentielle et logarithme

- $\ln(e^a) = a$,
- $e^{\ln(a)} = a > 0$,
- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$,
- $a^b = e^{b\ln a}$.

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $a^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \geq b > 0 \Leftrightarrow a \geq \ln b$
- $e^a < b \Leftrightarrow a < \ln b$, avec $b > 0$

Limites particulières

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

4.1.3 Fonction puissance

Définition 4.1.3. *On appelle fonction puissance d'un réel a positif, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Remarque. *La fonction puissance est strictement positive*

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x\ln(a)} > 0.$$

Propriétés. *Pour tous $a, b > 0$, on a les égalités suivantes*

- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(a^x) = x\ln(a)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : a^{x+y} = a^x \times a^y$ *et* $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)^y = a^{xy}$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : (ab)^x = a^x \times b^x$.

Etude de la fonction puissance

Soit la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$.
Comme $a^x = e^{x\ln(a)}$, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,car composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

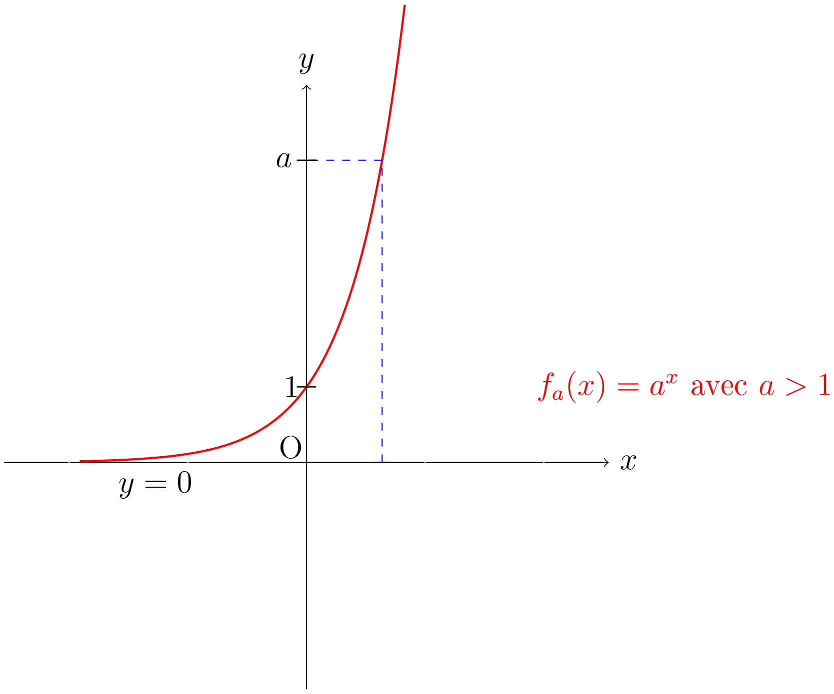
$$\forall x \in \mathbb{R} : f_a'(x) = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = \ln(a)\, e^{x\ln(a)} = \ln(a)\, a^x.$$

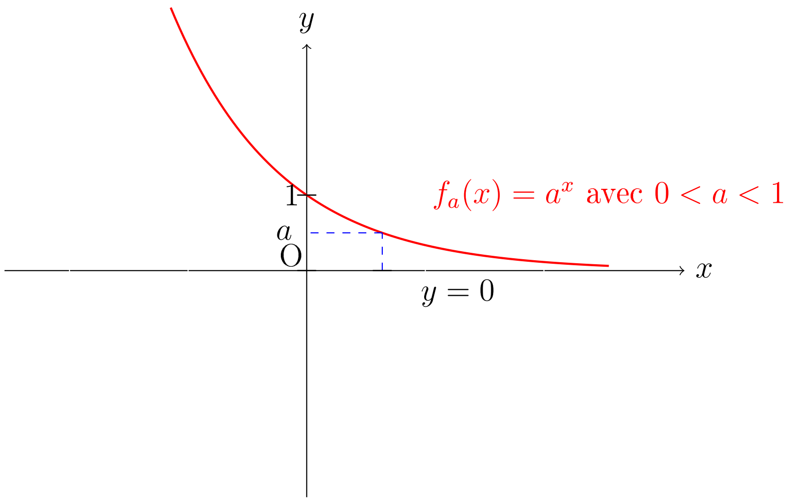
Le signe de la dérivée dépend donc du signe de $\ln(a)$. On a alors :

- Si $a > 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R} : f_a'(x) > 0$, la fonction puissance est croissante.
- Si $0 < a < 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R} : f_a'(x) < 0$, la fonction puissance est décroissante.

Limite à l'infini

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$



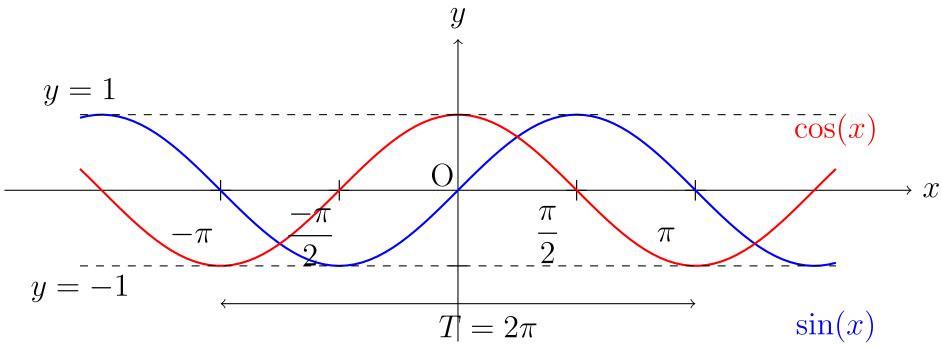


4.2 Fonctions trigonométriques et leurs inverses

4.2.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus

Fonction	$\sin x$	$\cos x$
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	impaire	paire
Période	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$



Propriétés

Les fonctions sinus et cosinus satisfont les propriétés suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

Formules d'addition $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

Formules de transformation de produits en sommes

- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

Formules de transformation de sommes en produits

- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Les fonctions tangente et cotangente

Définition 4.2.1. *On appelle tangente la fonction* tan *(ou tg) définie par :*

$$x \to \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} - A,$$

où $A = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
On appelle cotangente la fonction cot *définie par :*

$$x \to \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} - B,$$

où $B = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriétés.

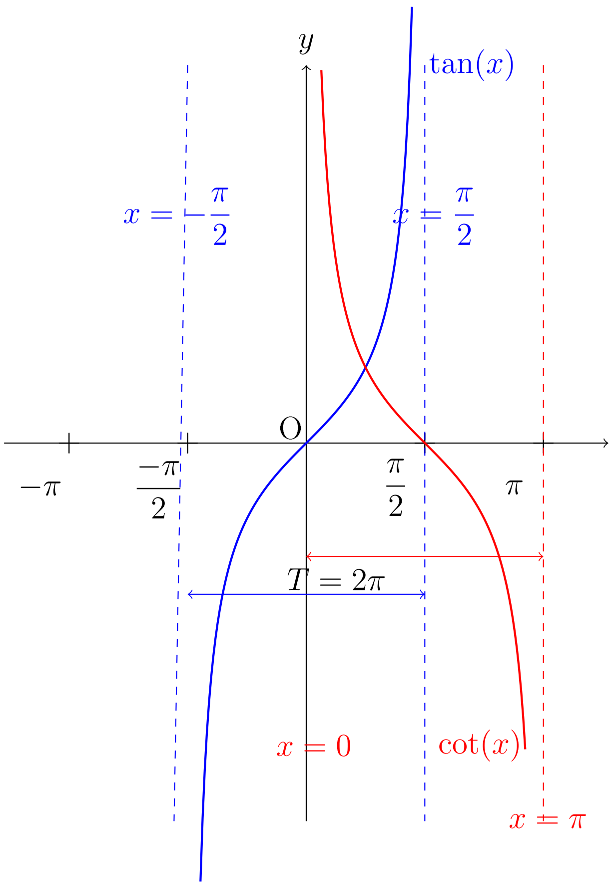
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R} - (A \cup B)$, *on a*

$$\cot(x)\tan(x) = 1.$$

- *Les deux fonctions étant périodiques de période* π, *on peut donc restreindre le domaine de l'étude à un intervalle de longueur* π , *par exemple* $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *pour la tangente et* $]0, \pi[$ *pour la cotangente.*
- *Les fonctions tangente et cotangente sont continues et dérivable sur leurs domaines de définition et l'on a :*

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} - A,$$

$$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right), \ \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} - B,$$



Propriétés. *La fonction tangente satisfait les propriétés suivantes,* $\forall x, y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, *on a*

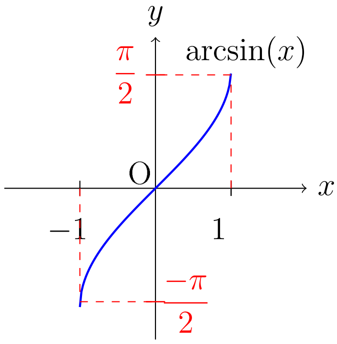
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
- $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x) + \tan(y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x . \cos y}$

4.2.2 Fonctions circulaire réciproques

Fonction $x \to \arcsin x$

La fonction sinus a une fonction dérivée strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arcsinus et est notée arcsin,

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x \longmapsto \arcsin(x).$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in [-1,1]$, *on a* $\sin(\arcsin(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $\arcsin\sin(x) = x$.

(3) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $\sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.

(4) $\forall x \in [-1,1]$, *on a* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 4.2.1. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$, *et l'on a*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$, par dérivation, on obtient

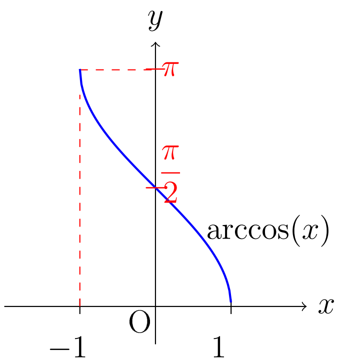
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Fonction $x \to \arccos x$

La fonction cosinus a une fonction dérivée strictement négative sur $]0,\pi[$, donc bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arccosinus et est notée arccos,

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \qquad x \longmapsto \arccos(x).$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in [-1,1]$, *on a* $\cos(\arccos(x)) = x$.

(2) $\forall x \in [0,\pi]$, *on a* $\arccos\cos(x) = x$.

(3) $\forall x \in [0, \pi]$, *on a* $\cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos(y)$.

(4) $\forall x \in [-1, 1]$, *on a* $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Proposition 4.2.2. *La fonction* arccos *est dérivable dans* $]-1, 1[$, *et l'on a*

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$, par dérivation, on obtient

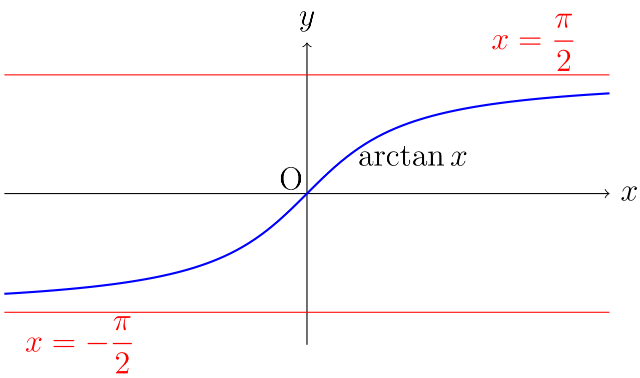
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

Fonction $x \to \arctan x$

La fonction tangente a une fonction dérivée strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée arctan,

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad x \longmapsto \arctan(x).$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a* $\tan(\arctan(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $\arctan\tan(x) = x$.

(3) *La fonction* arctan *est dérivable surs* $\mathbb{R}$, *et l'on a*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.3 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.3.1 Fonctions hyperboliques

Définition 4.3.1. *Les fonctions de la variable* x,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \operatorname{coth}(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)}, \quad (x \neq 0)$$

s'appellent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique.

Propriétés.

(1) *La fonction ch est paire et les fonction* sh, th, coth *impaires.*

(2) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les relations*

$$ch(x) + \operatorname{sh}(x) = e^{x}, \qquad \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = -e^{-x},$$
$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1, \qquad 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{coth}(x)}.$$

(3) *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a les relations*

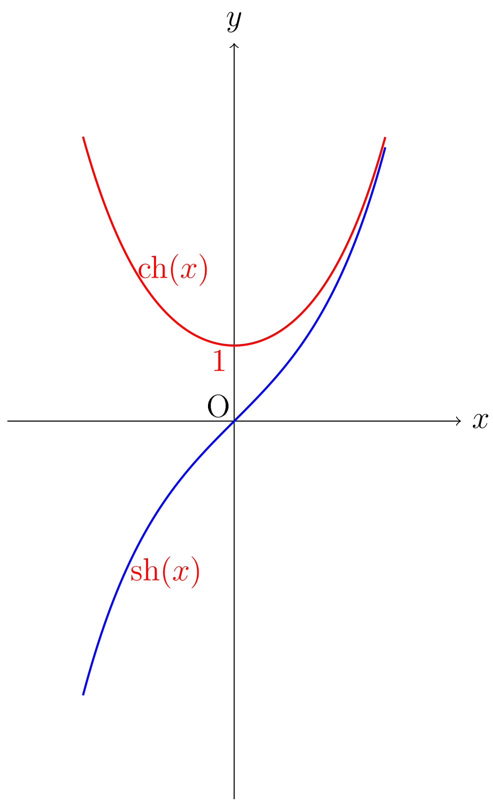
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y),$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y),$$
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}.$$

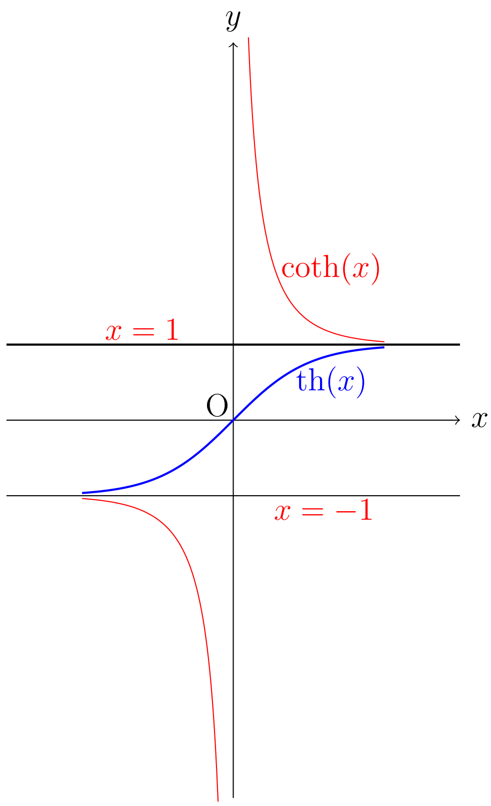
(4) *Les fonction* ch, sh, th *sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, et l'on a*

$$(\operatorname{ch}(x))' = \operatorname{sh}(x), \qquad (\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x), \qquad (\operatorname{th}(x))' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

(5) *La fonction* coth *est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et l'on a*

$$(\operatorname{coth}(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$



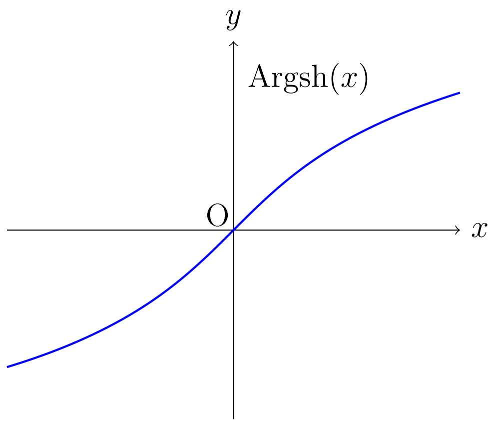


4.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction $x \to \operatorname{Argsh}$

La fonction sinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et est notée Argsh,

$$\text{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \text{Argsh}\,(x)\,.$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}\,(\text{Argsh}\,(x)) = x$ *et* $\text{Argsh}\,(\text{sh}\,(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argsh}\,(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

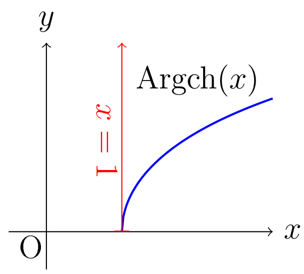
(3) *La fonction* Argsh *est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et l'on a*

$$(\text{Argsh}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fonction $x \to$Argch

La fonction cosinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et est notée Argch,

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\, \to [0, +\infty[\,, \qquad x \longmapsto \text{Argch}\,(x)\,.$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in [1, +\infty[,\ \text{ch}\,(\text{Argch}\,(x)) = x$.

(2) $\forall x \in [0, +\infty[,\ \text{Argch}\,(\text{ch}\,(x)) = x$.

(2) $\forall x \in [1, +\infty[,\ \text{Argch}\,(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)$.

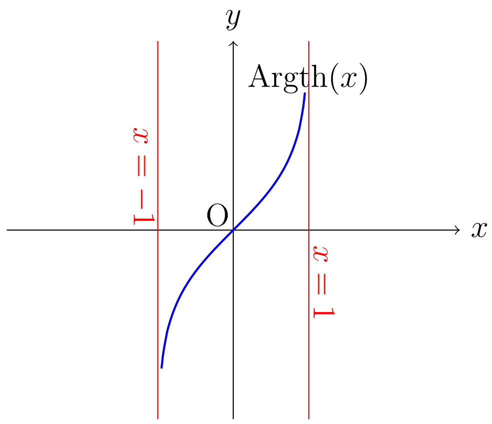
(3) *La fonction* Argch *est continue sur* $[1, +\infty[$, *dérivable sur* $]1, +\infty[$, *et l'on a*

$$(\text{Argch}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonction $x \to$Argth

La fonction tangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. L'application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée Argth,

$$\mathrm{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \mathrm{Argth}\,(x)\,.$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{th}\,(\mathrm{Argth}\,(x)) = x.$

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argth}\,(\mathrm{th}\,(x)) = x.$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+},\ \mathrm{Argth}\,(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

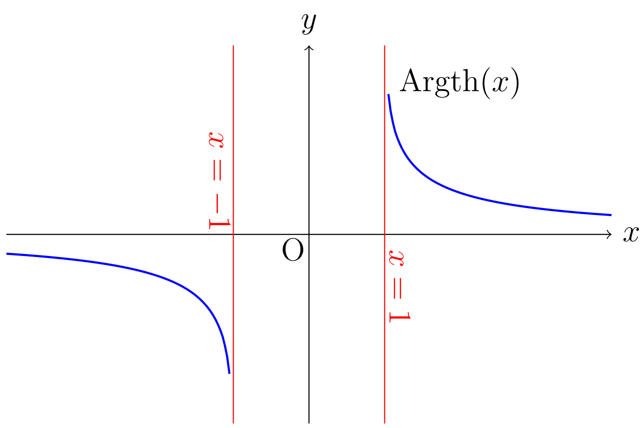
(3) *La fonction* Argth *est continue et dérivable sur* $]-1,1[$*, et l'on a*

$$\left(\mathrm{Argth}\,(x)\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Fonction $x \to$Argcth

La fonction cotangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cotangente hyperbolique et est notée Argcth,

$$\mathrm{Argcth} :]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}^*, \qquad x \longmapsto \mathrm{Argcth}\,(x)\,.$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\coth(\operatorname{Argcth}(x)) = x$.

(2) $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, $\operatorname{Argcth}(\coth(x)) = x$.

(2) $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, $\operatorname{Argcth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

(3) *La fonction* Argcth *est continue et dérivable sur* $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, *et l'on a*

$$(\operatorname{Argcth}(x))' = \frac{1}{x^2-1}.$$

4.4 Exercices

4.4.1 Énoncés

Exercice 23.

1) *Donner la valeur exacte de* $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2) *Écrire sous forme d'expression algébrique*

$$a)\ \cos(2\arcsin(x)), \qquad b)\ \cos(\arctan(x)).$$

Exercice 24. *Résoudre les équation suivantes :*

$a)$ $\arccos x = 2\arccos\dfrac{3}{4}$,

$b)$ $\arcsin x = \arcsin\dfrac{2}{5} + \arcsin\dfrac{3}{5}$.

Exercice 25. *Vérifier*

$i)$ *Pour tout* $x \in]-1, 1[$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

$ii)$ *Pour tout* $x \in]0, +\infty[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 26.

1) *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

$$a)\ f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right), \qquad b)\ f_2(x) = \arccos\left(\sqrt{2-x^2}\right),$$

$$c)\ f_3(x) = \arccos(2x+1) - \arcsin(3x^2).$$

2) *Calculer les dérivées des fonctions* f_1 *et* f_2.

Exercice 27. *Simplifier les expressions suivantes :*

$$a)\ \operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}x), \qquad b)\ \operatorname{th}(\operatorname{Argsh}x), \qquad c)\ \operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh}x),$$

$$d)\ \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}x), \qquad e)\ \operatorname{th}(\operatorname{Argch}x), \qquad f)\ \operatorname{ch}(2\operatorname{Argch}x),$$

$$g)\ \frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch}(x)) - \ln(2)}.$$

4.4.2 Correction des exercices

Solution 23.

1) *On a* $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$, *pour* $a = \frac{\pi}{6}$, *on trouver*

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

alors

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad et \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, *donc*

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad et \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

2.*a*) *On a* $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$, *pour* $\alpha = \arcsin(x)$, $(x \in [-1, 1])$, *alors*

$$\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2x^2.$$

2.*b*) *On a*

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha) \qquad implique \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)},$$

pour $\alpha = \arctan(x)$, $(x \in \mathbb{R})$,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $\arctan(x) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\arctan(x)) \geq 0$, *donc*

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Solution 24.

a) *On a* $\cos(\arccos x) = x$, *alors* $\cos(\arccos x) = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$, *donc*

$$x = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right) = 2\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right) - 1 = 2.\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

b) *Comme* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *et* $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, *alors*

$$\begin{aligned}
x &= \sin(\arcsin x) \\
&= \sin\left(\arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}\right) \\
&= \sin\left(\arcsin\frac{2}{5}\right).\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) + \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right).\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{2}{5}\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} \\
&= \frac{3\sqrt{21}+8}{25}.
\end{aligned}$$

Solution 25.

1) *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$, pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Ainsi f est constante $]-1,1[$, alors

$$f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

donc

$$\forall x \in]-1,1[: \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Soit $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, alors

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

alors g est constante sur $]0,+\infty[$, donc

$$g(x) = g(1) = 2\arctan(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 26.

1) *L'ensemble de définition*

$$\mathcal{D}_{f_1} = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \text{ et } x \neq -1\right\}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left(-1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} \leq 1, \\ -1 \leq \frac{x}{x+1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{x+1} \leq 0, \\ \frac{2x+1}{x+1} \geq 0, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ (2x+1)(x+1) \geq 0, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,+\infty[, \\ x \in]-\infty,-1] \cup \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[,
\end{aligned}$$

comme $-1 \notin \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$, alors

$$\mathcal{D}_{f_1} = \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[.$$

$$\mathcal{D}_{f_2} = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sqrt{2-x^2} \leq 1 \text{ et } 2-x^2 \geq 0\right\}$$

$$\begin{aligned}
\left(-1 \leq \sqrt{2-x^2} \leq 1 \text{ et } 2-x^2 \geq 0\right) &\Leftrightarrow \left(2-x^2 \leq 1 \text{ et } 2-x^2 \geq 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x^2 \geq 1 \text{ et } x^2 \leq 2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\text{ et } x \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\right) \\
&\Leftrightarrow x \in \left[1,\sqrt{2}\right] \cup \left[-\sqrt{2},-1\right]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{f_2} = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right].$$

$$\mathcal{D}_{f_3} = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1 \ et \ -1 \leq 3x^2 \leq 1\right\}$$

$$\begin{aligned}
\left(-1 \leq 2x+1 \leq 1 \ et \ -1 \leq 3x^2 \leq 1\right) \ &\Leftrightarrow \ \left(-1 \leq x \leq 0 \ et \ x^2 \leq \frac{1}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \ x \in [-1, 0] \ \ et \ x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\
&\Leftrightarrow \ x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right].
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{f_3} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right].$$

2) *Les dérivées de f_1 et f_2.*

$$[\arcsin(u)]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad et \qquad [\arccos(u)]' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

On a $f_1(x) = \arcsin(u(x))$, *avec* $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$, *donc*

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}} \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2 - x^2}} \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{\sqrt{2x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad \forall x > \frac{-1}{2},
\end{aligned}$$

car

$$x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[\Rightarrow x+1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |x+1| = x+1.$$

On a $f_2(x) = \arccos\left(\sqrt{2-x^2}\right)$ *,avec* $u(x) = \sqrt{2-x^2}$, *donc*

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2}} \left(\sqrt{2-x^2}\right)' \\
&= \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{(2-x^2)(x^2-1)}}, \quad \forall x \in \left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[.
\end{aligned}$$

Solution 27.

a) $\mathrm{ch}^2(\alpha) - \mathrm{sh}^2(\alpha) = 1$, *pour* $\alpha = \mathrm{Argsh}\ x$, *on a*

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}\ x) = \mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}\ x) + 1 = x^2 + 1.$$

Comme $\mathrm{ch}(x) \geq 0$, *alors*

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\ x) = \sqrt{x^2+1}.$$

$$\mathrm{th}(\mathrm{Argsh}x) = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}x)}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) $\mathrm{sh}\,(2\alpha) = 2\mathrm{ch}\,(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(\alpha)$, *pour* $\alpha = \mathrm{Argsh}x$,

$$\mathrm{sh}\,(2\mathrm{Argsh}x) = 2\mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}x)\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{Argsh}x) = 2x\sqrt{x^2+1}.$$

c) *On a* $\mathrm{ch}^2\,(\alpha) - \mathrm{sh}^2\,(\alpha) = 1$, *pour* $\alpha = \mathrm{Argch}\ x$,

$$\mathrm{sh}^2\,(\mathrm{Argch}\ x) = \mathrm{ch}^2\,(\mathrm{Argch}\ x) - 1 = x^2 - 1.$$

Comme $\mathrm{Argch}x \geq 0$, *alors* $\mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\ x) \geq 0$, *donc*

$$\mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\ x) = \sqrt{x^2-1}.$$

d) *On a*

$$\mathrm{th}\,(\mathrm{Argch}x) = \frac{\mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}x)}{\mathrm{ch}\,(\mathrm{Argch}x)} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}.$$

f) *On a* $\mathrm{ch}\,(2\alpha) = 2\mathrm{ch}^2\,(\alpha) - 1$, *pour* $\alpha = \mathrm{Argch}x$,

$$\mathrm{ch}\,(2\mathrm{Argch}x) = 2\mathrm{ch}^2\,(\mathrm{Argch}x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

g) *On a*

$$\begin{aligned} 2\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}\,(2x) &= 2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right) \\ &= e^{-2x} + 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x - \ln\,(\mathrm{ch}\,(x)) - \ln\,(2) &= x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \ln\,(2) \\ &= x - \ln\left(e^x+e^{-x}\right) + \ln\,(2) - \ln\,(2) \\ &= x - \ln\left(e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right) \\ &= x - \ln e^x - \ln\left(1+e^{-2x}\right) \\ &= -\ln\left(1+e^{-2x}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{2\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}\,(2x)}{x - \ln\,(\mathrm{ch}\,(x)) - \ln\,(2)} = -\frac{1+e^{-2x}}{\ln\,(1+e^{-2x})}.$$

5 | Développement limité

5.1 Formule de Taylor

5.1.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.1.1. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Supposons que f est de classe $n-1$ et $f^{(n)}(x_0)$ existe (finie). Alors $\forall x \in [a, b]$,*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur $]a, b[$ telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque. *Le terme $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$ est souvent abrégé en $o(x - x_0)^n$.*

5.1.2 Formule de Mac-Laurin-Young

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule précédente, on obtient la formule de Mac-Laurin à l'ordre n avec reste de Young

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

5.2 Développements limités au voisinage d'un point

5.2.1 Définition et existence

Définition 5.2.1. *Soit I un intervalle ouvert. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité (DL) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, ..., c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + ... + c_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

a) L'égalité précédente s'appelle un développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n.

b) Le terme $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + ... + c_n(x - a)^n$ est appelé la partie polynomiale du développement limité.

c) Le terme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé le reste du développement limité.

Exemple 5.2.1. *La fonction $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(0) = 1$. Par suite*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

Exemple 5.2.2. *La fonction $\varphi(x) = \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\varphi^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad et \qquad \varphi^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ce qui donne

$$\varphi^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & si\ n = 2p, \\ (-1)^p n & si\ n = 2p+1. \end{cases}$$

Ainsi

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$$

5.2.2 Développements limités des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Mac-Laurin-Young

Fonction f	Développement limité
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\ln(x+1)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n} x^n + x^n \varepsilon(x)$

5.2.3 Développement limité des fonctions en un point quelconque

Proposition 5.2.1. *f admet un développement limité à l'ordre n en a si et seulement si la fonction $f(x+a)$ admet un DL à l'ordre n en 0.*

Exemple 5.2.3. *Calculons le développement limité de la fonction $f(x) = e^x$ en 1.*
On pose $h = x - 1$, si x est proche de 1, alors h est proche de 0. Nous allons nous ramener à un développement limité de e^h en $h = 0$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x = e^{1+h} = ee^h = e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + ... + \frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h)\right) \\ &= e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + ... + \frac{e}{n!}(x-1)^n + (x-1)^n\varepsilon(x-1), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

Exemple 5.2.4. *Calculons le développement limité de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en $\frac{\pi}{2}$. On sait que*

$$\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

on se ramène au développement limité de $\sin(h)$ quand $h = x - \frac{\pi}{2} \to 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \cos(x) &= -\sin(h) = -h + \frac{h^3}{3!} + ... + (-1)^n\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} - h^{2n+2}\varepsilon(h) \\ &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + +... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}\varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Opérations sur les développements limités

On suppose que f et g sont deux fonctions dont les développements limités en 0 à l'ordre n, sont donnés par :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + ... + c_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) = C(x) + x^n\varepsilon_1(x), \\ g(x) &= a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) = A(x) + x^n\varepsilon_2(x), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.

5.2.4 Somme et produit

(1) $f + g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :

$$f(x) + g(x) = (c_0 + a_0) + (c_1 + a_1)x + ... + (c_n + a_n)x^n + x^n\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$.

(2) $f.g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :

$$(f \times g)(x) = f(x).g(x) = T_n(x) + x^n\varepsilon(x),$$

où T_n est le polynôme

$$T_n(x) = (c_0 + c_1x + ... + c_nx^n)(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n).$$

On conserve seulement les monômes de degré $\leq n$.

Exemple 5.2.5. *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$ *définie sur l'intervalle* $]1, +\infty[$. *Cherchons son développement à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0, *on a*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x),$$
$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x),$$

D'où

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Exemple 5.2.6. *Cherchons le développement à l'ordre* 5 *de* $\varphi : x \to \cos(x)\sin(x)$ *au voisinage de* 0, *on calcule le produit*

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right),$$

en ne gardant que les monômes de degré 5, *d'où*

$$\varphi(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x).$$

5.2.5 Quotient

Division suivant les puissances croissantes

Soient A et B deux polynômes, le terme constant de B étant non nul, et n un entier strictement positif, alors il existe des polynômes Q et R (déterminés de manière unique) tels que :

$$A = BQ + x^{n+1}R.$$

et $\deg(Q)$ est inférieur ou égal à n.
On défini la division suivant les puissance croissante comme la division euclidienne classique, mais en écrivant les polynômes suivant les puissances croissantes, et en cherchant à éliminer d'abord les termes constants, puis les termes en x, etc.

Remarque. *Dans la division de polynômes suivant les puissances croissantes à l'ordre* n, *le reste est divisible par* x^{n+1}.

Exemple 5.2.7. *Si* $A(x) = 1 + x$, $B(x) = 1 - x$, *on trouve à l'ordre* 2 : $Q(x) = 1 + 2x + 2x^2$ *et* $R(x) = 2$.

$$\begin{array}{l|l}
1+x & 1-x \\ \cline{2-2}
1-x & 1+2x+2x^2 \\ \cline{1-1}
2x & \\
2x-2x^2 & \\ \cline{1-1}
2x^2 & \\
2x^2-2x^3 & \\ \cline{1-1}
2x^3. &
\end{array}$$

Technique de calculer des développements limités

Nous allons utiliser le développement limité de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + ... + (-1)^n u^n + u^n \varepsilon_3(x).$$

(1) Si $a_0 = 1$, on pose $u = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit

$$\frac{f}{g} = f.\frac{1}{1+u},$$

ou bien

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{C(x) + x^n \varepsilon_1(x)}{A(x) + x^n \varepsilon_2(x)} = B(x) + x^n \varepsilon_3(x),$$

où B est le quotient de la division de C par A suivant les puissances croissantes à l'ordre n.

(2) Si $a_0 \neq 0$ et $a_0 \neq 1$, alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} x + ... + \frac{a_n}{a_0} x^n + x^n \varepsilon_2(x)}.$$

(3) Si $a_0 = 0$, alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exemple 5.2.8. *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$ *définie sur l'intervalle* $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. *Cherchons son développement à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0. *Le développment limité de* $\sin(x)$ *nous donne*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)} \\ &= 1 - u(x) + u^2(x) + x^4 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)$, *d'où*

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + x^4 \varepsilon(x).$$

5.2.6 Intégration

Notons F une primitive de f, la fonction F admet un développment limité en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1} \theta(x),$$

où $\lim\limits_{x \to a} \theta(x) = 0$. Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le développment limité de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près.

Exemple 5.2.9. *Soit la fonction* $f(x) = \arctan(x)$ *définie sur l'intervalle* $\mathbb{R}$. *Cherchons son développement au voisinage de* 0, *on a* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *alors*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \varepsilon(x).$$

et $f(0) = 0$, *d'où*

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

5.2.7 Composition

Supposons que $g(0) = 0$ c'est à dire que $a_0 = 0$. Alors la fonction $f \circ g$ admet un développment limité en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme à l'ordre n de la composition $C(A(x))$.

Exemple 5.2.10. *Cherchons le développement limité de* $f(x) = e^{\sin(x)}$ *en* 0 *à l'ordre* 4. *Le développement limité de* $\sin(x)$ *nous donne*

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + x\varepsilon\left(x^4\right)\right) \\ &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + u^4\varepsilon(u), \end{aligned}$$

avec $u = x - \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$, *d'où*

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x).$$

5.2.8 Développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$.

Définition 5.2.2. *On dit que* f *admet un développement limité en* $+\infty$ *à l'ordre* n *s'il existe des réels* $c_0, c_1, ..., c_n$, *tels que*

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + ... + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0.$

Exemple 5.2.11. *Soit la fonction* $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *définie sur* $]0, +\infty[$. *Cherchons son développement à l'ordre* n *en* $+\infty$, *posons* $u = \dfrac{1}{x}$, *lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *on a* u *tend vers* 0, *alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + ... + \frac{u^n}{n!} + u^n\varepsilon(u) \\ &= 1 + \frac{1}{1!x} + \frac{1}{2!x^2} + ... + \frac{1}{n!x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$

5.3 Application des Développements limités

5.3.1 Calculer des limites.

Généralement pour des limites de forme indéterminée, il est toujours possible, avec un changement de variable, de se ramener à une limite quand x tends vers 0.

Exemple 5.3.1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x}{x(\cos(x)-1)}$.
On voit que cette limite est une forme indéterminée. On connait le DL de $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$ *en* 0

$$\sin(x)-x=\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon_1(x)\,,\quad DL_3(0)\,,$$

$$x(\cos(x)-1)=\frac{x^3}{2!}+x^3\varepsilon_2(x)\,,\quad DL_3(0)\,,$$

en remplçant on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x(\cos(x)-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon_1(x)}{\frac{x^3}{2!}+x^3\varepsilon_2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x)}=\frac{1}{3}.$$

5.3.2 Position de la courbe par rapport à une tangente

On suppose que f admet un $DL_n(x_0)$,

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)\,,$$

avec $n\geq 2$. Cela implique que f (où son prolongement si f n'est pas définie en x_0), est continue et dérivable en x_0, avec

$$f(x_0)=a_0 \quad \text{et} \quad f'(x_0)=a_1$$

Donc l'équation de la tangente est $y=a_0+a_1(x-x_0)$. Par conséquent le signe de $f(x)-(a_0+a_1(x-x_0))$ se déduit, au voisinage de x_0, du signe de

$$a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)\,.$$

Soit m le plus petit entier tel que $a_m\neq 0$ Alors on a

- si m est pair alors le signe de $f(x)-(a_0+a_1(x-x_0))$ est localement de même signe que a_m et on a
  (1) si a $a_m>0$ alors $f(x)-(a_0+a_1(x-x_0))\geq 0$ localement et donc la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.
  (2) si $a_m<0$ alors $f(x)-(a_0+a_1(x-x_0))\leq 0$ localement et donc la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.
- si m est impair alors la courbe traverse la tangente en $(x_0,f(x_0))$, c'est une tangente d'inflexion.

Exemple 5.3.2. *Soit* $f(x)=\sin(x)$, *on a DL de* f *en* 0 *est donné par la formule*

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\,,\quad DL_3(0)\,,$$

Donc la tangente en 0 *est* $y=x$ *et le graphe de* f *traverse la tangente, car* $m=3$ *est impair.*

Exemple 5.3.3. *Soit* $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, *on a le DL de* f *en* 0 *pat la formule*

$$\begin{aligned} f(x) &= x.\frac{1}{1-x}=x\left(1+x+x^2\right)+x^3\varepsilon(x)\\ &= x+x^2+x^3\varepsilon(x)\,,\quad DL_3(0)\,,\end{aligned}$$

Donc la tangente en 0 *est* $y=x$, *comme* $m=2$ *est pair et* $a_m=a_2=1>0$, *alors le graphe de* f *est en dessous de la tangente.*

5.3.3 Position de la courbe par rapport à une asymptote

On suppose que f admet une asymptote d'équation $y = a_0 + a_1 x$.
Pour trouver a_0 et a_1 on sait qu'on doit calculer les limites :

$$a_0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad a_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - a_0 x)$$

Pour trouver a_0 et a_1 en utilisant la méthode des DL, on calcule le DL à l'ordre 1 en 0 de la fonction $yf\left(\frac{1}{y}\right)$.
Si $yf\left(\frac{1}{y}\right) = a_0 + a_1 y + y\varepsilon(y)$ en 0, alors

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + a_1 x + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Pour connaitre la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on doit calculer un DL d'ordre supérieur de $yf\left(\frac{1}{y}\right)$ en 0. Si

$$yf\left(\frac{1}{y}\right) = a_0 + a_1 y + ... + a_n y^n + y^n \varepsilon(x) \text{ en } 0.$$

Alors

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = \frac{a_2}{x} + ... + \frac{a_n}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-1}}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } +\infty.$$

Soit m le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$. Alors

- si $a_m > 0$ alors $f(x) - (a_0 + a_1 x) \geq 0$, donc la courbe est "au-dessus" de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
- si a $a_m < 0$ alors $f(x) - (a_0 + a_1 x) \leq 0$, la courbe est "en-dessous" de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exemple 5.3.4. *Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Le développement à l'ordre n en $+\infty$ est donné par la formule suivante

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{2!x} + ... + \frac{1}{(n+1)!x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, donc $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f), comme $m = 2$ et $a_2 = \frac{1}{2} > 0$, alors la courbe (C_f) est "au-dessus" de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

5.4 Exercices

5.4.1 Énoncés

Exercice 28. *Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes*

1) $f_1(x) = \sqrt{1+x}$, 2) $f_2(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, 3) $f_3(x) = \frac{e^x}{x + e^x}$,
4) $f_4(x) = \ln(2 + x)$ 5) $f_5(x) = \ln(x + e^x)$

Exercice 29. *Déterminer les développements limités des fonctions suivantes*

1) $f_1(x) = (\cos(x) - 1)(\mathrm{sh}(x) - x)$, $DL_5(0)$

2) $f_2(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$, $DL_2(0)$

3) $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - 2x + 1}$, $DL_4(0)$

4) $f_4(x) = x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$, $DL_2(+\infty)$

Exercice 30.

(1) *Calculer le développement limité à l'ordre* 2 *en* $x_0 = 2$ *de*

$$f(x) = \ln x \qquad et \qquad g(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

(2) *En déduire*

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2}.$$

Exercice 31.

(1) *Déterminer le développement limité à l'ordre* 4*, au voisinage* $\dfrac{\pi}{2}$ *de* $f(x) = e^{\sin(x)}$.

(2) *Donner un équivalent de* $f(x) - e$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) *En déduire*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Exercice 32. (1) *Calculer le développement limité à l'ordre* 3*, au voisinage de* 0 *de la fonction* $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x+1)}$.

(2) *En déduire*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^3(x)} \left[f(x) - e^{\frac{x}{2}} + 1 - \cos(x)\right].$$

Exercice 33. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x) = \dfrac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{sh}(x)}$.

(1) *Déterminer le développement limité de* f*, au voisinage de* 0*, à l'ordre* 3.

(2) *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en* 0 *et que ce prolongement est dérivable en* 0*, donner la valeur de* $f'(0)$.

5.4.2 Correction des exercices

Solution 28.

1) *On a* $f_1(x) = \sqrt{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ *de la forme* $(x+1)^{\alpha}$*, avec* $\alpha = \frac{1}{2}$*, donc*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{1+x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

2) *On a*

$$\begin{aligned} e^x - 1 - x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) - 1 - x \\ &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + x^3\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{25} + \frac{x^3}{120} + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

3) *On a*

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Alors

$$f_3(x) = \frac{e^x}{x + e^x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}.$$

DL d'un quotient

$$\begin{array}{l|l} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} & 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ \cline{2-2} -\left(1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) & 1 - x + 2x^2 - \frac{7}{2}x^3 \\ \cline{1-1} -x & \\ -\left(-x - 2x^2 - \frac{x^3}{2}\right) & \\ \cline{1-1} 2x^2 + \frac{x^3}{2} & \\ -\left(2x^2 + 4x^3\right) & \\ \cline{1-1} -\frac{7}{2}x^3. & \end{array}$$

Donc

$$f_3(x) = 1 - x + 2x^2 - \frac{7}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

4) *On a*

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln(2 + x) = \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \\ &= \ln(2) + \ln(1 + u), \text{ avec } u = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \ln(1 + u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Donc

$$f_4(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x).$$

5) *On*

$$\begin{aligned} e^x + x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) + x \\ &= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \ln(x + e^x) = \ln\left(1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) \\ &= \ln(1+u), \quad \textit{avec } u = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Comme

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u)$$

Alors $u^2 = 4x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$ *et* $u^3 = 8x^3 + x^3\varepsilon(x)$, *donc*

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(4x^2 + 2x^3\right) + \frac{1}{3}\left(8x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \\ &= 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Solution 29.

(1) *Par le développement limité de* $\cos x$ *et* $\operatorname{sh}(x)$ *à l'ordre* 5 *au voisinage de* 0, *on obtient*

$$\begin{aligned} (\cos(x) - 1)(\operatorname{sh}(x) - x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 1\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - x\right) + x^5\varepsilon(x) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + x^5\varepsilon(x) \\ &= x^5\left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24}\right)\left(\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120}\right) + x^5\varepsilon(x) \\ &= \frac{-x^5}{12} + x^5\varepsilon(x). \end{aligned}$$

d'où

$$f_1(x) = \frac{-x^5}{12} + x^5\varepsilon(x).$$

(2) *Par le développement limité de* $\sin x$ *à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0, *on obtient*

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x)\right) \\ &= \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u), \end{aligned}$$

avec $u = -\dfrac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x)$, *ce qui donne*

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x).$$

(3) *La décomposition de f_4 donne*

$$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1} = \frac{1+x^2}{1-2x+x^2}$$

DL d'un quotient

$$\begin{array}{l|l}
1+x^2 & 1-2x+x^2 \\ \cline{2-2}
-\left(1-2x+x^2\right) & 1+2x+4x^2+6x^3+8x^4 \\ \cline{1-1}
2x & \\
-\left(2x-4x^2+2x^3\right) & \\ \cline{1-1}
4x^2-2x^3 & \\
-\left(4x^2-8x^3+4x^4\right) & \\ \cline{1-1}
6x^3-4x^4 & \\
-\left(6x^3-12x^4\right) & \\ \cline{1-1}
8x^4 &
\end{array}$$

d'où

$$f_3(x) = 1+2x+4x^2+6x^3+8x^4+x^4\varepsilon(x).$$

4) *Par le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0, on obtient*

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{8}x^3+x^3\varepsilon(x),$$

alors, le développement limité de $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{3}{8x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution 30.

(1) *En posant $t = x-2$, l'expression en t de $f(x)$ devient*

$$\varphi(t) = \ln 2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right).$$

Son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 est donné par

$$\varphi(t) = \ln 2+\frac{t}{2}-\frac{t^{2}}{8}+t^3\varepsilon(t).$$

En développant la dernière expression et en posant $t = x-2$, on obtient

$$f(t) = \ln 2+\frac{(x-2)}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+(x-2)^3\varepsilon(x-2).$$

Par la formule de Taylor pour g à l'ordre 2, on a

$$g(x) = 7(x-2)+5(x-2)^2+(x-2)^3\varepsilon(x-2).$$

(2) *Par le développement limité de* f *et* g *à l'ordre* 3, *on a*

$$\frac{\ln x-\ln 2}{x^3-x^2-x-2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{8}+(x-2)^3\varepsilon(x-2)}{7+5(x-2)+(x-2)^3\varepsilon(x-2)},$$

d'où

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x^3-x^2-x-2}=\frac{1}{14}.$$

Solution 31.

(1) *Après le changement de variable,* $t=x-\frac{\pi}{2}$, *on est conduit à calculer le développement limité par rapport à* t *au voisinage de* 0 *la fonction* $\psi(t)=e^{\cos(t)}$. *Par le développement de la fonction* $\cos(t)$ *au point* $t=0$ *à l'ordre* 4, *on a*

$$\psi(t)=\exp\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+t^4\varepsilon(t)\right).$$

Alors, en posant $u=-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+t^4\varepsilon(t)$, *on obtient*

$$\psi(t)=e\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+u^2\varepsilon(u)\right).$$

Par rapport à t, *le développement devient*

$$\psi(t)=e\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{7}{24}t^4\right)+t^4\varepsilon(t).$$

Le développement limité de f *au voisinage de* $\frac{\pi}{2}$ *est*

$$f(x)=e-\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{e}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\varepsilon\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

(2) *Par le développement limité de* f *au voisinage de* $\frac{\pi}{2}$, *on a l'équivalence au voisinage de* $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{f(x)-e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\sim-\frac{e}{2}.$$

(3) *Par* (2), *la limite cherchée est*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{e}{2}.$$

Solution 32.

(1) *Le développement limité de* $\ln(1+x)$ *nous donne au voisinage de* 0

$$f(x)=\sqrt{1+\ln(x+1)}=\sqrt{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)}=\sqrt{1+u},$$

avec $u=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$, *par le développement limité de* $\sqrt{1+u}$ *à l'ordre* 3, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+u^3\varepsilon(u)\\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{3}{8}x^2+\frac{17}{48}x^3+x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

(2) *Par le développement limité de* e^x *et* $\cos x$ *à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0, *on a*

$$1-\cos(x)-e^{\frac{x}{2}}=-1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{x}{42}^3+x^3\varepsilon(x),$$

d'où

$$f(x)-e^{\frac{x}{2}}+1-\cos(x)=\frac{37}{112}x^3+x^3\varepsilon(x).$$

Par le développant limité de $\sin x$ *à l'ordre* 1, *on a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^{\frac{x}{2}}+1-\cos(x)}{\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{37}{112}x^3+x^3\varepsilon(x)}{x^3+x^3\varepsilon(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{37}{112}+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}=\frac{37}{112}.$$

Solution 33.

(1) *Par le développement limité de* $\mathrm{ch}(x)$ *à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0, *on a*

$$\ln(\mathrm{ch}(x))=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)\right)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u),$$

avec $u=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)$, *par rapport à* u, *le développement devient*

$$\ln(\mathrm{ch}(x))=u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+x^4\varepsilon(x).$$

Par le développement limité de $\mathrm{sh}(x)$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 4, *on a*

$$f(x)=\frac{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)}{1+\frac{x^2}{6}+x^3\varepsilon(x)}.$$

En posant $u=\dfrac{x^2}{6}+x^3\varepsilon(x)$, *le développement limités de* $\dfrac{1}{1+u}$ *au voisinage de* 0 *et à l'ordre* 2, *donne*

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x).$$

(2) *Par le développement limité de* f *au voisinage de* 0, *on a*

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)=0.$$

la fonction $\widetilde{f}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{sh}(x)}, & si\ x\neq 0,\\ 0, & si\ x=0,\end{cases}$$

prolonge la fonction f *par continuité, la définition de la limite au point* $x_0=0$, *nous donne*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)}{x}=\frac{1}{2},$$

donc $\widetilde{f}$ *est dérivable au point* $x_0=0$.

6 | Algèbre linéaire

6.1 Lois de composition interne

Définition 6.1.1. *Soit G un ensemble. Une loi de composition interne sur G est une application de $G \times G$ dans G. Si on la note* $\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (a,b) & \to & a * b \end{array}$ *on parle de la loi $*$ et on dit que $a * b$ est le composé de a et b pour la loi $*$.*

Exemple 6.1.1.
Sur $G = \mathbb{Z}$, l'addition définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \to & a + b \end{array}$*, la multiplication* $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \to & a \times b \end{array}$ *et la soustraction* $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \to & a - b \end{array}$ *sont des lois de compositions internes.*
Sur $G = \mathbb{R}^2$, l'addition $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \to & (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$ *est une loi interne.*

Exemple 6.1.2. *Dans $\mathbb{R}^*$ on définit la loi δ par :*

$$x\delta y = x + y + \ln |xy|,$$

Alors la loi δ est interne sur $\mathbb{R}^*$, en effet, soit $x, y \in \mathbb{R}^*$, montrons que $x\delta y \in \mathbb{R}^*$, comme

$$\begin{array}{rcl} (x\delta y = 0) & \Leftrightarrow & (x + y + \ln|xy| = 0) \\ & \Leftrightarrow & (\ln|xy| = -(x+y)) \\ & \Leftrightarrow & \left(|xy| = e^{-(x+y)}\right) \\ & \Rightarrow & (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0) \end{array}$$

d'où $x\delta y \in \mathbb{R}^*$ est une loi interne.

Définition 6.1.2. *Soit $*$ une loi interne sur un ensemble G. On dit que*

1) *La loi $*$ est commutative si*
$$\forall x, y \in G, \quad x * y = y * x.$$

2) *La loi $*$ est dite associative si :*

$$\forall x, y, z \in G, \quad (x * y) * z = y * (x * z).$$

3) *La loi $*$ admet sur G un élément neutre, noté e, si*

$$\exists e \in G, \quad \forall x \in G, \quad x * e = e * x = x.$$

Si, on outre, la loi $*$ est commutative, il suffit de montrer que :

$$\forall x \in G, \quad : x * e = x.$$

Exemple 6.1.3. *Dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ on définit loi interne $*$ par :*

$$x * y = x + y - 2xy.$$

La loi $*$ est interne sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, en effet, soit $x, y \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, montrons que $x * y \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, comme

$$\begin{aligned}
x * y = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x + y - 2xy = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x(1-2y) - \frac{1}{2}(1-2y) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-2y)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

d'où $x * y \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ et alors $*$ est une loi interne. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on a

$$x * y = x + y - 2xy = y + x - 2yx = x * y$$

donc la loi $*$ est commutative.

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (x + y - 2xy) * z = (x + y - 2xy) + z - 2(x + y - 2xy)z \\
&= x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz \\
&= x + (y + z - 2yz) - 2x(y + z - 2yz) \\
&= x + (y * z) - 2x(y * z) = x * (y * z),
\end{aligned}$$

donc la loi $*$ est associative. Soit $e \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, tel que $x * e = e * x = x$, alors

$$x + e - 2xe = e + x - 2ex = x \Leftrightarrow e(1-2x) = 0 \Leftrightarrow e = 0$$

donc a loi $*$ admet comme l'élément neutre élément $e = 0$.

Définition 6.1.3. *Soit $*$ une loi interne sur un ensemble G, possédant un élément neutre e et soit $x \in G$. On dit que x admet un symétrique $x^{'}$ pour la loi $*$, si*

$$x * x^{'} = x^{'} * x = e.$$

Exemple 6.1.4. *Dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ on définit loi interne $*$ par :*

$$x * y = x + y - 2xy,$$

La loi $*$ *admet* $e = 0$ *commre élément neutre. Soit* $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$*, tel que* $x * x' = x' * x = e$*, alors*

$$x + x' - 2xx' = 0 \Leftrightarrow x'(1 - 2x) = -x \Leftrightarrow x' = \frac{x}{2x-1},$$

donc, l'élément symétrique de x *est*

$$x' = \frac{x}{2x-1}, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Montrons que $x' \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$*. En effet, soit* $x, y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *, montrons que* $x * y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$*, on a*

$$x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x \Leftrightarrow -1 = 0,$$

ce qui est absurde, d'où $x' \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$*.*

Définition 6.1.4. *Soit* G *un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées* Δ *et* $*$*. On dit que* $*$ *est distributive par rapport à* Δ *si*

$$\forall x, y, z \in G, \quad x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z).$$

6.1.1 Structure de groupe

Définition 6.1.5. *Soit* G *un ensemble muni d'une loi de composition interne* $*$*. On dit que* $(G, *)$ *est un groupe si la loi* $*$ *satisfait aux trois conditions suivantes :*

(1) $*$ *est associative.*

(2) $*$ *admet un élément neutre.*

(3) *Chaque élément de* G *admet un symétrique pour* $*$ *.*

Si de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif ou abélien (du nom du mathématicien Abel).

Exemple 6.1.5.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

(2) $(\mathbb{R}, \times)$ *n'est pas un groupe car* 0 *n'admet pas d'élément symétrique.*

(3) $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe commutatif.*

Définition 6.1.6. *Soit* $(G, *)$ *un groupe. Une partie* $H \subset G$ *(non vide) est un sous groupe de* G *si, la restriction de l'opération* $*$ *à* H *lui confère la structure de groupe.*

Proposition 6.1.1. *Soit* H *une partie non vide du groupe* G*. Alors,* H *est un sous groupe de* G *si, et seulement si,*

(i) *pour tout* $x, y \in H$*, on a* $x * y \in H$*,*

(ii) *pour tout* $x \in H$*, on a* $x' \in H$*, avec* x' *le symétrique de* x*.*

Exemple 6.1.6. $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^*, \times)$*. En effet :*

$i)$ *Si* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*, alors* $x \times y \in \mathbb{R}_+^*$*,* *ii) Si* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $x^{-1} = \frac{1}{x}$ *élément symétrique de* x *et* $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 6.1.7. *On pose* $2\mathbb{Z} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$, $(2\mathbb{Z}, +)$ *est sous-groupe de* $\mathbb{Z}$. *En effet :*

i) Si $x, y \in 2\mathbb{Z}$, *il existe* $x_1 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x = 2x_1$ *et* $y = 2y_1$, *alors*

$$x + y = 2x_1 + 2y_1 = 2(x_1 + y_1) \in 2\mathbb{Z},$$

ii) Si $x \in 2\mathbb{Z}$, *il existe* $x_1 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x = 2x_1$ *alors*

$$-x = -2x_1 = 2(-x_1) \in 2\mathbb{Z}.$$

6.1.2 Structure d'anneau

Définition 6.1.7. *Soit* A *un ensemble muni de deux lois de compositions internes que nous noterons* Δ *et* $*$. *On dit que* $(A, \Delta, *)$ *est un anneau si les conditions suivantes sont remplies :*

1) (A, Δ) *est un groupe commutatif.*

2) *La loi* $*$ *est associative.*

3) *La loi* $*$ *est distributive par rapport à la loi* Δ.

Si de plus la loi $*$ *est commutative, on dit que l'anneau* $(A, \Delta, *)$ *est commutatif. Si la loi* $*$ *admet un élément neutre, on dit que l'anneau* $(A, \Delta, *)$ *est unitaire.*

Exemple 6.1.8. $(\mathbb{Z}, +, .)$ *est un anneau commutatif et unitaire.*

Définition 6.1.8. *Si* $(A, \Delta, *)$ *est un anneau et* B *est une partie de* A, *on dit que* B *est un sous-anneau de* A *si, muni des lois induites par* A, *est lui-même un anneau, est-à-dire* $(B, \Delta, *)$ *est un anneau*

Dans ce qui suit, A désignera l'anneau $(A, +, .)$ avec 0 l'élément neutre de $+$ et s'il est unitaire, 1 serait son unité.

Proposition 6.1.2 (caractérisation des sous-anneaux)**.** *Une partie* B *de l'anneau* A *est un sous-anneau de* A *si et seulement si :*

i) pour tous $a, b \in B$, $a - b \in B$

ii) pour tous $a, b \in B$, $a \times B \in B$.

Exemple 6.1.9. *L'ensemble* $2\mathbb{Z} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ *est un sous-anneau de l'anneau* $(\mathbb{Z}, +, .)$. *En effet, soit* $x, y \in 2\mathbb{Z}$, *il existe* $n, m \in \mathbb{Z}$, *tels que* $x = 2n$ *et* $y = 2m$, *et on a*

$$x - y = 2(n - m) \in 2\mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad xy = 2(2nm) \in 2\mathbb{Z}.$$

6.1.3 Structure d'un corps

Définition 6.1.9. *Soit* $\mathbb{K}$ *un ensemble muni de deux lois de compositions internes toujours notées* Δ *et* $*$. *On dit que* $(\mathbb{K}, \Delta, *)$ *est un corps si les conditions suivantes sont remplies :*

1) $(\mathbb{K}, \Delta, *)$ *est un anneau.*

2) $(\mathbb{K}-\{e\},\Delta)$ *est un groupe, où e est l'élément neutre de* $*$.

Si de plus Δ *est commutative, On dit que* $(\mathbb{K},*,\Delta)$ *est un corps commutatif.*

Exemple 6.1.10. $(\mathbb{R},+,.)$ *est un corps commutatif.*

Définition 6.1.10. *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps et* H *une partie non vide de* $\mathbb{K}$ *alors,* H *est dit sous-corps de* $\mathbb{K}$ *si les restrictions des deux opérations de* $\mathbb{K}$ *confèrent à* H *la structure d'un corps.*

Le résultat suivant caractérise tout sous-corps H d'un corps donné :

Proposition 6.1.3. *Si* $\mathbb{K}$ *est une partie non vide d'un corps* $\mathbb{K}$ *alors,* H *est sous-corps de* $\mathbb{K}$ *si, et seulement si,*

(1) $a \in H$ *et* $b \in H \Rightarrow a-b \in H$,

(2) $a \in H$ *et* $b \in H-\{0\} \Rightarrow a.b^{-1} \in H$.

Exemple 6.1.11.

- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels est sous-corps du corps* $(\mathbb{C},+,\times)$.
- *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des rationnels est sous-corps du corps* $(\mathbb{R},+,\times)$ *donc, de* $(\mathbb{C},+,\times)$.

6.2 Espace vectoriel

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $(+)$:

$$\begin{array}{rcl}(+) : E\times E & \to & E\\ (x,y) & \to & x+y\end{array}$$

et d'une opération externe notée $(.)$:

$$\begin{array}{rcl}(.) : \mathbb{K}\times E & \to & E\\ (\lambda,y) & \to & \lambda.y\end{array}$$

Définition 6.2.1. *Un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ *ou un* $\mathbb{K}$- *espace vectoriel est un triplet* $(E,+,.)$ *tel que :*

1) $(E,+)$ *est un groupe commutatif.*

2) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x,y\in E,\ \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$

(3) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.y$

(4) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (\lambda\mu).x=\lambda(\mu.x)$

(5) $\forall x\in E,\ 1_{\mathbb{K}}.x=x$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ *des scalaires.*

Exemple 6.2.1.

- $(\mathbb{R},+,.)$ *est un* $\mathbb{R}$- *espace vectoriel,*
- $(\mathbb{C},+,.)$ *est un* $\mathbb{C}$- *espace vectoriel,*

3) $(\mathbb{C},+,.)$ *est un* $\mathbb{R}$- *espace vectoriel,*

- *Si on considère* $\mathbb{R}^n$ *muni des deux opérations suivante*

$$\begin{array}{ccc} (+) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ ((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) & \to & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, (y_1, y_2, ..., y_n)) & \to & (\lambda y_1, \lambda y_2, ..., \lambda y_n) \end{array}$$

on peut facilement montrer que $(\mathbb{R}^n,+,.)$ *est un* $\mathbb{R}$- *espace vectoriel.*

Proposition 6.2.1. *Si* E *est* $\mathbb{K}$- *espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x \in E,\ 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$

(2) $\forall x \in E,\ (-1_{\mathbb{K}}).x = -x$

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$

(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$

(5) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_E$.

Définition 6.2.2. *Soit* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{K}$- *espace vectoriel et soit* F *un sous ensemble non vide de* E. *On dit que* F *est sous espace vectoriel si* $(F,+,.)$ *est aussi un* $\mathbb{K}$-*espace vectoriel.*

Remarque.

1) *Lorsque* $(F,+,.)$ *est* $\mathbb{K}$-*sous espace vectoriel de* $(E,+,.)$, *alors* $0_E \in F$.

2) *Si* $0_E \notin F$. *alors* $(F,+,.)$ *ne peut pas être un* $\mathbb{K}$- *sous espace vectoriel de* $(E,+,.)$.

Théorème 6.2.1. *Soit* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{K}$- *espace vectoriel et* $F \subset E$, F *non vide on a les équivalences suivantes :*

(1) F *est un sous espace vectoriel de* E.

(2) F *est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in F, \quad \lambda.x \in F \text{ et } x + y \in F.$$

(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F,\ \lambda.x + \mu.y \in F$, *d'où :*

$$F \text{ est sous espace vectoriel} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$

Exemple 6.2.2. *On pose* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, *alors* F *est un sous espace vectoriel, en effet,*

- $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$, *car* $0 - 0 = 0$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in F$, *alors* $x - y = 0$ *et* $x' - y' = 0$, *donc*

$$\lambda (x - y) + \mu \left(x' - y'\right) = \left(\lambda x + \mu x'\right) - \left(\lambda y + \mu y'\right) = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda (x, y) + \mu (x', y') \in F$, *d'où* F *est sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6.2.2. *L'intersection d'une famille non vide de sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.*

Remarque. *La réunion de deux sous espace vectoriel n'est pas forcément un sous espace vectoriel.*

Exemple 6.2.3. *Soient* $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ *et* $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 0\}$ *deux sous espaces vectoriels dans* $\mathbb{R}^2$*,* $F_1 \cup F_2$ *n'est un sous espace vectoriel, car*

$$u_1 = (1, 0) \in F_1,\ u_2 = (0, 1) \in F_2,\ \textit{et}\ u_1 + u_2 = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$$

6.2.2 Somme de deux sous espaces vectoriels

Définition 6.2.3. *Soit* E_1*,* E_2 *deux sous espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, on appelle somme des deux espaces sous vectoriels,* E_1 *et* E_2*, que l'on, note* $E_1 + E_2$ *l'ensemble suivant :*

$$E_1 + E_2 = \{x \in E : \exists x_1 \in E_1,\ \exists x_2 \in E_2\ \textit{tel que}\ x = x_1 + x_2\}.$$

Exemple 6.2.4. *Soient* $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 0\}$ *des sous espaces vectoriels dans* $\mathbb{R}^2$*, si* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, alors*

$$(x, y) = \underbrace{(0, y)}_{\in F_1} + \underbrace{(x, 0)}_{\in F_2},$$

donc $(x, y) \in E_1 + E_2$*, d'où* $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$.

Proposition 6.2.3. *La somme de deux sous espaces vectoriels* E_1 *et* E_2 *(d'un même* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel) est un sous espace vectoriel de* E *contenant* $E_1 \cup E_2$*, i.e.,*

$$E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2.$$

6.2.3 Somme directe de deux sous espaces vectoriels

Définition 6.2.4. *Soit* E_1, E_2 *deux sous espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. On dira que la somme* $E_1 + E_2$ *de deux sous espaces vectoriels, est directe si* $E_1 \cap E_2 = \{0\}$*. On écrit* $E_1 \oplus E_2$*.*

Proposition 6.2.4. *Soit* E_1, E_2 *deux sous espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. La somme* $E_1 + E_2$ *est directe si* $\forall x \in E_1 + E_2$*, il existe un unique vecteur* $x_1 \in E_1$*, un unique vecteur* $x_2 \in E_2$*, tel que* $x = x_1 + x_2$*.*

Exemple 6.2.5. *Soient* $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ *et* $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : y = z = 0\}$ *des sous espaces vectoriels dans* $\mathbb{R}^3$*.*

- *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, alors*

  $$(x, y, z) = \underbrace{(0, y, z)}_{\in F_1} + \underbrace{(x, 0, 0)}_{\in F_2},$$

  donc $(x, y, z) \in F_1 + F_2$*, d'où* $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^2$*.*
- *Soit* $(x, y, z) \in F_1 \cap F_2$*, alors* $(x, y, z) \in F_1$ *et* $(x, y, z) \in F_2$*, ça signifie que* $x = 0$ *et* $y = z = 0$*, alors* $(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$*, c'est-à-dire* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$*.*

Enfin, nous concluons que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$*.*

6.2.4 Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, .)$ par E.

Définition 6.2.5. *Soit E un espace vectoriel et $e_1, e_2, ..., e_n$ des éléments de E,*

1) *On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sont libres ou linéairement independents, si pour tout $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$:*
$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}.$$
Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.

2) *On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille génératrice de E, ou que E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ si*
$$\forall x \in E, \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}, \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n.$$

3) *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille libre et génératrice de E, alors $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est appelée une base de E.*

Exemple 6.2.6. *Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (1, -1)$, alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet,*

i) *$\{u_1, u_2\}$ est libre. $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,*
$$\begin{aligned} (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0) &\Rightarrow \alpha_1 (1, 0) + \alpha_2 (1, -1) = (0, 0) \\ &\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

ii) *$\{u_1, u_2\}$ est génératrice. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$,*
$$(x, y) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2) \Rightarrow \alpha_2 = -y \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha_1 = x + y \in \mathbb{R},$$
donc il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Remarque. *Dans un espace vectoriel E, tout vecteur non nul est libre.*

Exemple 6.2.7. *Dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels et à une indéterminée x :*
$$\mathbb{R}_2 [x] = \left\{ P (x) = a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
alors, $\{p_1 (x) = 1, p_2 (x) = x, p_3 (x) = x^2\}$ est une famille base. En effet,

i) *Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, alors*
$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha p_1 (x) + \beta p_2 (x) + \gamma p_3 (x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0.$$
ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc $\{1, x, x^2\}$ est une famille libre.

ii) Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = a + bx + cx^2 = ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x),$$

c'est-à-dire

$$P = ap_1 + bp_2 + cp_3,$$

donc $\{1, x, x^2\}$ est génératrice.

Proposition 6.2.5. *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ sont deux bases de l'espace vectoriel E, alors $n = m$.*

Remarque. *Si un espace vectoriel E admet une base alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre lâ ne dépend pas de là base mais il dépend seulement de l'espace E.*

Définition 6.2.6. *Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, on appelle la dimension de E, noté $\dim(E)$ le nombre défini par $\dim(E) = Card(B)$, où $Card(B)$ est le cardinal de B.*

Exemple 6.2.8. *On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc*

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = Card(\{e_1, e_2, e_3\}) = 3.$$

Exemple 6.2.9. *Dans $\mathbb{R}_2[x]$, la famille $\{1, x, x^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, donc*

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = Card\left\{1, x, x^2\right\} = 3.$$

Théorème 6.2.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors*

1) *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est base de $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est génératrice $\Leftrightarrow \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est libre.*
2) *Si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ sont p vecteurs dans E, avec $p > n$, alors $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ ne peut être libre, de plus si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ est génératrice, alors il existe n vecteurs parmis $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ qui forment une base E.*
3) *Si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ sont p vecteur dans E, avec $p < n$, alors $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ ne peut être génératrice de plus si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ est libre, alors il existe $(n-p)$ vecteur $\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ dans E tels que $\{e_1, e_2, ..., e_{p+1}, .., e_n\}$ est une base pour E.*
4) *Si F est un sous espace vectoriel de E alors $\dim F \leq n$, et de plus $\dim F = n \Leftrightarrow F = E$.*

6.3 Application linéaire

6.3.1 Définition

Définition 6.3.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda.x) = \lambda.f(x),$$

où d'une manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y).$$

Remarque. *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*

Exemple 6.3.1. *L'application f définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\to f(x, y, z) = (2x + y, y - z) \end{aligned}$$

est une application linéaire. En effet, soient $(x, y, z), \left(x', y', z'\right) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f\left[(x, y, z) + \left(x', y', z'\right)\right] &= f\left(x + x', y + y', z + z'\right) \\ &= \left(2\left(x + x'\right) + \left(y + y'\right), \left(y + y'\right) - \left(z + z'\right)\right) \\ &= \left(2x + 2x' + y + y', y + y' - z - z'\right) \\ &= \left((2x + y) + \left(2x' + y'\right), (y - z) + \left(y' - z'\right)\right) \\ &= (2x + y, y - z) + \left(2x' + y', y' - z'\right) \\ &= f(x, y, z) + f\left(x', y', z'\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f[\lambda(x, y, z)] &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z) = (\lambda(2x + y), \lambda(y - z)) \\ &= \lambda(2x + y, y - z) \\ &= \lambda f(x, y, z). \end{aligned}$$

Remarque. *Toutes les applications ne sont pas des applications linéaires*

Définition 6.3.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que*

1) *f est un isomorphisme de E dans F, si f est bijective.*
2) *f est un endomorphisme, si $(E, +, .) = (F, +, .)$.*
3) *f est un automorphisme, si f est un isomorphisme et un endomorphisme.*

Exemple 6.3.2. *L'application f définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = -2x. \end{aligned}$$

est un automorphisme. En effet, soit $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda x + y) = -2(\lambda x + y) = \lambda(-2x) + (-2y) = \lambda f(x) + f(y),$$

et l'application f est bijective, où

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f^{-1}(x) = \frac{-1}{2}x. \end{aligned}$$

Notation. *L'application nulle, notée* $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ *est donnée par :*

$$f : E \to F, \quad x \to f(x) = 0_F.$$

L' application identité, notée id_E *est donnée par :*

$$id_E : E \to E, \quad x \to id_E(x) = x.$$

Proposition 6.3.1. *Soit f une application linéaire de E dans F, on a*

1) $f(0_E) = 0_F,$
2) $\forall x \in E : f(-x) = -f(x).$

Démonstration. Soit $x \in E$, on a

$$\begin{array}{l} 1) \ f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}}.0_E) = 0_{\mathbb{K}}.f(0_E) = 0_F, \\ 2) \ f(-x) = f((-1).x) = (-1).f(x) = -f(x). \end{array}$$

□

6.3.2 Noyau, image et rang d'une application linéaire

Définition 6.3.3. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

(1) *L'ensemble $f(E)$ s'appelle l'image de l'application linéaire f et est noté Imf, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Im}f = \{f(x) : x \in E\}.$$

(2) *L'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ s'appelle le noyau de l'application linéaire f et est noté $Kerf$, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Ker}f = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

Exemple 6.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire définie par*

$$(x, y) \to f(x, y) = x - y.$$

Le noyau de l'application linéaire f,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}f &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\} \\ &= \{x(1, 1) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

donc le $\mathrm{Ker}f$ *est un sous espace vectoriel engendré par $e = (1, 1)$ donc il est de dimension 1, et sa base est $\{e\}$.*
L'image de l'application linéaire f,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f &= \left\{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x - y : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proposition 6.3.2. *Soit f une application linéaire de E dans F, alors*

1) $\mathrm{Im}f$ *est un sous espace vectoriel de* F.

2) $\mathrm{Ker}f$ *est un sous espace vectoriel de* E.

Définition 6.3.4. *Soit f une application linéaire de E dans F, si* $\dim \mathrm{Im}f = n < +\infty$, *alors n est appelé le rang de f et on le note $rg(f)$.*

Proposition 6.3.3. *Soit f une application linéaire de E dans F. On a les équivalences suivantes :*

(i) *f est surjective* $\Leftrightarrow \mathrm{Im}f = F$.

(ii) *f est injective* $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}f = \{0_E\}$.

Exemple 6.3.4. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une application linéaire définie par*

$$(x, y) \to f(x, y) = (y, x).$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f &= \left\{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ (y, x) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y(1, 0) + x(0, 1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Ker}f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, x) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\} = \{(0, 0)\}$$

alors $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$ *et* $\mathrm{Ker}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, *donc f est bijective.*

6.3.3 Application Linéaire sur des espace de dimension finies.

Proposition 6.3.4. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriels et f et g deux applications linéaires de E dans F. Si E est de dimension finie n et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, alors*

$$\forall k \in \{1, 2, .., n\} : f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E : f(x) = g(x).$$

Démonstration. L'implication $(\Leftarrow)$ est evidente.
Pour $(\Rightarrow)$ on a E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, donc

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n,$$

comme f et g sont linéaires, alors

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n)$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + ... + \lambda_n g(e_n)$$

donc si on suppose que $\forall k \in \{1, 2, .., n\} : f(e_k) = g(e_k)$ donc on déduit que

$$\forall x \in E : f(x) = g(x).$$

$\square$

Exemple 6.3.5. *Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(1,0) = -1 \text{ et } f(0,1) = 4,$$

alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f[x(1,0) + y(0,1)] = xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= -x + 4y \end{aligned}$$

Proposition 6.3.5. *Soit f une application linéaire de E dans F avec dimension de E est finie, on a :*

$$\dim E = \dim ker(f) + \dim Im(f).$$

Exemple 6.3.6. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = -x + 5y,$$

on a

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5y\right\} \\ &= \{y(5,1) : y \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

alors $\dim ker(f) = 1$, *comme* $\dim \mathbb{R}^2 = 1$, *donc*

$$\dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim ker(f) = 1.$$

Proposition 6.3.6. *Soit f une application linéaire de E dans F avec* $\dim E = \dim F = n$. *On a alors les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} f \text{ est isomorphisme } &\Leftrightarrow f \text{ est surjective } &&\Leftrightarrow \dim Im(f) = \dim F \\ &\Leftrightarrow f \text{ est injective } &&\Leftrightarrow Im(f) = F \\ &\Leftrightarrow \dim ker(f) = 0 &&\Leftrightarrow ker(f) = \{0\} \end{aligned}$$

Remarque. *De cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec* $\dim E$ *finie alors nécessairement* $\dim E = \dim F$ *en d'autres termes si* $\dim E \neq \dim F$ *alors f ne peut être un isomorphisme.*

Exemple 6.3.7. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x,y) = (2x - y, x),$$

on a

$$\begin{aligned} ker(f) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = x = 0\right\} \\ &= \{(0,0)\}, \end{aligned}$$

comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *et* $ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, *alors f est un isomorphisme.*

6.4 Exercices

6.4.1 Énoncés

Exercice 34. *On définit sur* $G =]-1, 1[$ *la loi interne* $*$ *comme suit :*

$$\forall (x, y) \in G \times G : x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrons que $(G, *)$ *est un groupe commutatif.*

Exercice 35. *On considère*

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer que $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ *est un anneau.*

Exercice 36. *Soit* $\mathbb{D}$ *l'ensemble des nombres décimaux,*

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k} : n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\right\}$$

(1) *Démontrer que* $(\mathbb{D}, +, \times)$ *est un anneau*

(2) *Quels sont ses éléments inversibles ?*

Exercice 37. *Soit* $d \in \mathbb{N}$ *que* $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. *On note*

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

Démontrer que $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right], +, \times\right)$ *est un corps.*

Exercice 38. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *les deux lois* $\oplus$, $\otimes$ *comme suit :*

$$\forall (x, y), \left(x', y'\right) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \oplus \left(x', y'\right) = \left(x + x', y + y'\right).$$

$$\forall (x, y), \left(x', y'\right) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \otimes \left(x', y'\right) = \left(x.x', y.y'\right).$$

Est ce que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un corps commutatif ?*

Exercice 39. *On considère dans* $\mathbb{R}^3$, *le sous ensemble* E *défini par :*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$$

(1) *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Donner une base de* E.

Exercice 40. *Soit* $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 2x - y - z = 0\}$ *un sous-ensembles de* $\mathbb{R}^3$.

(1) *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Déterminer une famille génératrice de* E *et en extraine une base.*

(3) *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(*i*) *Déterminer une famille génératrice de* F.

(*ii*) *A-t-on* $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 41. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z), \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(1) *Montrer que* f *est linéaire.*

(2) *Déterminer ker*(f).

Exercice 42. *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

(1) *Montrer que* f *est une application linéaire.*

(2) *Donner une base de son noyau et une base de son image.*

(3) *Déterminer* $f \circ f$.

Exercice 43. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

(1) *Montrer que* f *est une application linéaire.*

(2) *Donner une base de* $\ker(f)$, *en déduire* $\dim(\operatorname{Im}(f))$.

(3) *Donner une base de Im*(f).

Exercice 44. *Soit* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *définie pour tout* $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ *par*

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t).$$

(1) *Montrer que* f *est une application linéaire.*

(2) *Déterminer le noyau et l'image de* f.

(3) *A-t-on* $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.

6.4.2 Correction des exercices

Solution 34.

La loi $*$ *est interne sur* $]-1, 1[$. *En effet, soit* $x, y \in]-1, 1[$, *montrons que* $x * y \in]-1, 1[$. *On a*

$$\begin{aligned}
x * y \in]-1, 1[\quad &\Leftrightarrow \quad |x * y| < 1 \Leftrightarrow \frac{|x + y|}{|1 + xy|} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |x + y| < |1 + xy| \Leftrightarrow (x + y)^2 < (1 + xy)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\left(1 - y^2\right) - \left(1 - y^2\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right) > 0.
\end{aligned}$$

comme $x, y \in]-1, 1[$, *alors* $(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$, *d'où* $x * y \in]-1, 1[$ *et alors* $*$ *est une loi interne.*
La loi $*$ *est commutative :pour tout* $(x, y, z) \in G^2$

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy} = \frac{y + x}{1 + yx} = y * x.$$

La loi $*$ est associative : pour tout $(x,y,z)\in G^3$

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\frac{x+\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)}{1+x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)}\\ &= \frac{x(1+yz)+(y+z)}{1+yz+x(y+z)}=\frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}\end{aligned}$$

et un calcul similaire donne le même résultat pour $(x*y)*z$.
La loi $*$ admet un élément neutre, car pour tout $x\in\,]-1,1[$

$$\begin{aligned}(x*e=x) &\Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe}=x\Leftrightarrow x+e=x(1+xe)\\ &\Leftrightarrow x^2e=e\Leftrightarrow e=0,\ \text{car } x^2\neq 1,\end{aligned}$$

donc $e=0$ est l'élément neutre pour la loi $*$.
Tout élément de G admet un inverse dans G. Soit $x\in G$, alors

$$\left(x*x^{'}=e\right)\Leftrightarrow\frac{x+x^{'}}{1+xx'}=0\Leftrightarrow x+x^{'}=0\Leftrightarrow x^{'}=-x\in\,]-1,1[\,,$$

donc linverse x est $-x$, et alors $(G,*)$ est un groupe abélien.

Solution 35.

(1) *Il suffit de prouver que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$. Soit $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, il existe $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, tels que*

$$x=a+b\sqrt{2}\quad et\quad y=c+d\sqrt{2}$$

On a

$$\begin{aligned} x+y &= a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}\\ &= (a+c)+(c+d)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\times y &= \left(a+b\sqrt{2}\right)\times\left(c+d\sqrt{2}\right)\\ &= (ac+4db)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\end{aligned}$$

donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est stable par la loi $(+)$ et la $(\times)$. De plus

$$-x=-a-b\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\quad et\quad 1\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],$$

donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

Solution 36.

(1) *Comme $\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$, On va prouver que $(\mathbb{D},+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$. Soit $x,y\in\mathbb{D}$, il existe $n,m\in\mathbb{Z}$ et $k,\ell\in\mathbb{Z}$, tels que*

$$x=\frac{n}{10^k}\quad et\quad y=\frac{m}{10^\ell}.$$

Alors

$$x-y=\frac{n}{10^k}-\frac{m}{10^\ell}=\frac{n10^\ell-m10^k}{10^{k+\ell}}\in\mathbb{D}.$$
$$x\times y=\frac{n}{10^k}\times\frac{m}{10^\ell}=\frac{n\times m}{10^{k+\ell}}\in\mathbb{D}.$$

De plus $1_{\mathbb{Q}}=\frac{1}{10^0}\in\mathbb{D}$, donc $(\mathbb{D},+,\times)$ est bien un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

(2) *Soit* $x = \dfrac{n}{10^k} \in \mathbb{D}$ *inversible, d'inverse* $y = \dfrac{m}{10^\ell}$. *Alors*

$$1 = x \times y = \frac{nm}{10^{k+\ell}} \Rightarrow nm = 10^{k+\ell} = 2^{k+\ell}.5^{k+\ell}.$$

On en déduit que les seuls diviseurs premiers de n *sont* 2 *et* 5, *c'est-à-dire*

$$n = \mp 2^p 5^q, \quad \text{avec } p, q \in \mathbb{N}.$$

Réciproquement, soit $x = \dfrac{\mp 2^p 5^q}{10^k}$ *et montrons que* x *est inversible dans* $\mathbb{Z}$. *Posons*

$$y = \pm \frac{10^k}{2^p 5^q} = \pm \frac{10^k 2^q 5^p}{10^{p+q}} \in \mathbb{Z}.$$

De plus

$$x \times y = \left(\frac{\mp 2^p 5^q}{10^k} \right) \left(\pm \frac{10^k}{2^p 5^q} \right) = 1.$$

Ainsi, les inversibles de $(\mathbb{D}, +, \times)$ *sont les éléments de la forme*

$$\pm \frac{10^k}{2^p 5^q}, \quad \text{avec } p, q, k \in \mathbb{N}.$$

Solution 37.

On va démontrer que $\mathbb{Q}$ *est sous-corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$. *Soient* $x, y \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$, *alors il existe* $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ *tels que*

$$x = a_1 + b_1\sqrt{d} \quad \text{et} \quad y = a_2 + b_2\sqrt{d}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} x - y &= a_1 + b_1\sqrt{d} - \left(a_2 + b_2\sqrt{d}\right) \\ &= \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{d} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $x - y \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$.
Si $y \neq 0$, *alors*

$$\begin{aligned} y^{-1} &= \frac{1}{y} = \frac{1}{a_2 + b_2\sqrt{d}} = \frac{a_2 - b_2\sqrt{d}}{a_2^2 - b_2^2 d} \\ &= \underbrace{\frac{a_2}{a_2^2 - b_2^2 d}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{-b_2}{a_2^2 - b_2^2 d}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x \times y^{-1} &= \frac{1}{a_2^2 - b_2^2 d}\left(a_1 + b_1\sqrt{d}\right)\left(a_2 - b_2\sqrt{2}\right) \\ &= \underbrace{(a_1a_2 - db_1b_2)}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(a_2b_1 - a_1b_2)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{d} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $x \times y^{-1} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$.
Finalement, on a bien prouvé que $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right], +, \times\right)$ *est un sous-corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Solution 38.

(1) *Montrons que* $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un anneau*

(*i*) $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ *est un groupe abélien.*

(*a*) *La loi* $\oplus$ *est commutative :*$\forall (x,y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \oplus \left(x', y'\right) = \left(x + x', y + y'\right) = \left(x' + x, y' + y\right) = \left(x', y'\right) \oplus (x,y).$$

(*b*) *La loi* $\oplus$ *est associative :*$\forall (x,y), (x', y'), \left(x'', y''\right) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\left[(x,y) \oplus \left(x', y'\right)\right] \oplus \left(x'', y''\right) &= \left(x' + x, y' + y\right) \oplus \left(x'', y''\right) \\ &= \left(x + x' + x'', y + y' + y''\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y) \oplus \left[\left(x', y'\right) \oplus \left(x'', y''\right)\right] &= (x,y) \oplus \left(x' + x'', y' + y''\right) \\ &= \left(x + x' + x'', y + y' + y''\right) \\ &= \left[(x,y) \oplus \left(x', y'\right)\right] \oplus \left(x'', y''\right).\end{aligned}$$

(*c*) *Il existe* $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*

$$(e_1, e_2) \oplus (x,y) = (x,y) \oplus (e_1, e_2) = (x,y)$$

Puisque $\oplus$ *est commutative on traite une seul équation :*

$$\begin{aligned}((x,y) \oplus (e_1, e_2) = (x,y)) &\Rightarrow (x + e_1, y + e_2) = (x,y) \\ &\Rightarrow x + e_1 = x \text{ et } y + e_2 = y \\ &\Rightarrow e_1 = e_2 = 0,\end{aligned}$$

donc $(0,0)$ *est l'élément neutre de* $\oplus$.

(*d*) *Chaque élément de* $\mathbb{R}^2$ *possède un élément symétrique dans* $\mathbb{R}^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists \left(x', y'\right) \in \mathbb{R}^2$, *tel que*

$$\begin{aligned}\left((x,y) \oplus \left(x', y'\right) = (e_1, e_2)\right) &\Leftrightarrow \left(x + x', y + y'\right) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \left(x', y'\right) = -(x,y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Ainsi $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ *est un groupe commutatif.*

(*ii*) *La loi* $\otimes$ *est associative* $\forall (x,y), (x', y'), \left(x'', y''\right) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left[(x,y) \otimes \left(x', y'\right)\right] \otimes \left(x'', y''\right) = \left(x'x, y'y\right) \otimes \left(x'', y''\right) = \left(xx'x'', yy'y''\right).$$

$$\begin{aligned}(x,y) \otimes \left[\left(x', y'\right) \otimes \left(x'', y''\right)\right] &= (x,y) \otimes \left(x'x'', y'y''\right) = \left(xx'x'', yy'y''\right) \\ &= \left[(x,y) \otimes \left(x', y'\right)\right] \otimes \left(x'', y''\right).\end{aligned}$$

(iii) *La loi* $\otimes$ *est distributive par rapport à loi* $\oplus$ $.\forall\left(x,y\right),\left(x^{'},y^{'}\right),\left(x^{''},y^{''}\right)\in\mathbb{R}^{2}$, *montrons que*

$$(x,y)\otimes\left[\left(x^{'},y^{'}\right)\oplus\left(x^{''},y^{''}\right)\right]=\left[(x,y)\otimes\left(x^{'},y^{'}\right)\right]\oplus\left[(x,y)\otimes\left(x^{''},y^{''}\right)\right].$$

On a

$$\begin{aligned}(x,y)\otimes\left[\left(x^{'},y^{'}\right)\oplus\left(x^{''},y^{''}\right)\right] &= (x,y)\otimes\left(x^{'}+x^{''},y^{'}+y^{''}\right)\\ &= \left(xx^{'}+xx^{''},yy^{'}+yy^{''}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[(x,y)\otimes\left(x^{'},y^{'}\right)\right]\oplus\left[(x,y)\otimes\left(x^{''},y^{''}\right)\right] &= \left(xx^{'},yy^{'}\right)\oplus\left(xx^{''},yy^{''}\right)\\ &= \left(xx^{'}+xx^{''},yy^{'}+yy^{''}\right)\\ &= (x,y)\otimes\left[\left(x^{'},y^{'}\right)\oplus\left(x^{''},y^{''}\right)\right].\end{aligned}$$

donc $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ *est un anneau.*

(2) *Comme* $e=(0,0)$ *est l'élément neutre de la loi* $\otimes$, *montrons que* $(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\otimes)$ *est un groupe commutatif.*

(i) *La loit* $\otimes$ *est commutative,* $\forall\left(x,y\right),\left(x^{'},y^{'}\right)\in\mathbb{R}^{2}$,

$$(x,y)\otimes\left(x^{'},y^{'}\right)=\left(xx^{'},yy^{'}\right)=\left(x^{'}x,y^{'}y\right)=\left(x^{'},y^{'}\right)\otimes(x,y).$$

(ii) *Il existe* $e=(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *tel que :*

$$(e_1,e_2)\otimes(x,y)=(x,y)\otimes(e_1,e_2)=(x,y)$$

Puisque $\otimes$ *est commutative on traite une seule équation :*

$$(x,y)\otimes(1,1)=(x,y)\Leftrightarrow(x.1,y.1)=(x,y)$$

donc $(1,1)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *est l'élément neutre de* $\otimes$.

(iii) *Chaque élément de* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *possède un élément symétrique dans* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\exists\left(x^{'},y^{'}\right)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, *tel que*

$$\begin{aligned}\left((x,y)\otimes\left(x^{'},y^{'}\right)=(e_1,e_2)\right) &\Rightarrow \left(xx^{'},yy^{'}\right)=(1,1)\\ &\Rightarrow \begin{cases}xx^{'}=1\\ yy^{'}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{'}=\frac{1}{x},\ si\ x\neq0\\ y^{'}=\frac{1}{y},\ si\ y\neq0\end{cases}.\end{aligned}$$

Les couples $(x,0)$ *avec* $x\neq0$ *et* $(0,y)$ *avec* $y\neq0$ *n'ont pas des symétrique, donc* $(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\otimes)$ *n'est pas un groupe commutatif. Enfin,* $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ *n'est pas un corps commutatif.*

Solution 39.

(1) *On a*

- $0_{\mathbb{R}^3} \in E$, *car* $0+0+0=0$, *donc* $E \neq \emptyset$.
- *Soient* $u=(x,y,z) \in E$ *et* $v=\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right) \in E$, *on a donc* $x+y+z=0$ *et* $x^{'}+y^{'}+z^{'}=0$. *Soit* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lambda u+\mu v=\lambda(x,y,z)+\mu\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)=\left(\underbrace{\lambda x+\mu x^{'}}_{x''},\underbrace{\lambda y+\mu y^{'}}_{y''},\underbrace{\lambda z+\mu z^{'}}_{z''}\right),$$

$$\begin{aligned} x^{''}+y^{''}+z^{''} &= \lambda x+\mu x^{'}+\lambda y+\mu y^{'}+\lambda z+\mu z^{'} \\ &= (\lambda x+\lambda y+\lambda z)+\left(\mu x^{'}+\mu y^{'}+\mu z^{'}\right) \\ &= \lambda(x+y+z)+\mu\left(x^{'}+y^{'}+z^{'}\right)=0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda u+\mu v \in E$

Finalement E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *On a*

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=-(x+y)\right\} \\ &= \{(x,y,-x-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,-x)+(0,y,-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x\underbrace{(1,0,-1)}_{u_1}+y\underbrace{(0,1,-1)}_{u_2} : x,y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

alors $\{u_1,u_2\}$ *est une famille génératrice de* E, *montrons que* $\{u_1,u_2\}$ *est libre. Soit* $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u_1+\lambda_2 u_2=0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,-\lambda_1-\lambda_2)=(0,0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0,$$

donc $\{u_1,u_2\}$ *est une base de* E. *Alors la dimension de* E *est égale à* 2, *car*

$$\dim E = Card\{u_1,u_2\}=2.$$

Solution 40.

(1) *Soit* $u=(x,y,z) \in E$, *alors*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ 3x-3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y \\ x=z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x=y=z$$

donc

$$E=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y=z\right\}$$

- $0_{\mathbb{R}^3} \in E$, *car* $0=0=0$, *donc* $E \neq \emptyset$.
- *Soient* $u=(x,y,z) \in E$ *et* $v=\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right) \in E$, *on a donc* $x=y=z$ *et* $x^{'}=y^{'}=z^{'}$. *Soit* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lambda u+\mu v=\lambda(x,y,z)+\mu\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)=\left(\underbrace{\lambda x+\mu x^{'}}_{x''},\underbrace{\lambda y+\mu y^{'}}_{y''},\underbrace{\lambda z+\mu z^{'}}_{z''}\right),$$

comme $\lambda x+\mu x'=\lambda y+\mu y'=\lambda z+\mu z'$, *alors* $x''=y''=z''$, *ce qui montre que* $\lambda u+\mu v\in E$.

(2) *On a*

$$E=\{(x,x,x):x\in\mathbb{R}\}=\left\{x\underbrace{(1,1,1)}_{u_1}:x\in\mathbb{R}\right\}.$$

alors $\{u_1\}$ *est une famille génératrice de* E, *donc* $\{u_1\}$ *est une base de* E.

(3 − i) *Soit* $(x,y,z)\in F$, *alors* $z=x+y$, *donc*

$$F=\{(x,y,x+y):x,y\in\mathbb{R}\}=\left\{x\underbrace{(1,0,1)}_{u_2}+y\underbrace{(0,1,1)}_{u_3}:x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

alors $\{u_2,u_3\}$ *est une famille génératrice de* F. *Montrons que* $\{u_2,u_3\}$ *est libre. Soit* $\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$,

$$\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)\Rightarrow\lambda_2=\lambda_3=0,$$

donc $\{u_2,u_3\}$ *est une base de* F.

(3 − ii) *Comme* $\{u_1\}$ *est une base de* E, $\{u_2,u_3\}$ *est une base de* F, *alors si* $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$, *on a* $E\oplus F=\mathbb{R}^3$, *puisque* $Card\{u_1,u_2,u_3\}=\dim\mathbb{R}^3=3$, *il suffit de prouver* $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est libre. Soit* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}&\Rightarrow(\lambda_2+\lambda_1,\lambda_3+\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)\\&\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\end{aligned}$$

donc $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$, *d'où* $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

Solution 41.

(1) *Soient* $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,$v=\left(x',y',z'\right)\in\mathbb{R}^3$ *et* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned}f(\alpha u+\beta v)&=f\left(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z'\right)\\&=\left(\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z',2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'\right)\\&=\left((\alpha x+\alpha y+\alpha z)+\left(\beta x'+\beta y'+\beta z'\right),(2\alpha x+\alpha y-\alpha z)+\left(2\beta x'+\beta y'-\beta z'\right)\right)\\&=\alpha(x+y+z,2x+y-z)+\beta\left(2x'+y'+z',x'+y'-z'\right)\\&=\alpha f(u)+\beta f(v).\end{aligned}$$

Ce qui montre que f *est linéaire.*

(2) *On a*

$$\begin{aligned}\ker(f)&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:f(x,y,z)=0\right\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x+y+z=2x+y-z=0\right\},\end{aligned}$$

alors

$$(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y+z=0\\2x+y-z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-\frac{3}{2}x\\z=\frac{x}{2}\end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{\left(x, -\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x\right) : x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) : x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Solution 42.

(1) *Soient* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,$v = \left(x', y'\right) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'\right) \\ &= \left(\alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y', -3\alpha x - 3\beta x' + 3\alpha y + 3\beta y'\right) \\ &= \left((\alpha x - \alpha y) + \left(\beta x' - \beta y'\right), (-3\alpha x + 3\alpha y) + \left(-3\beta x' + 3\beta y'\right)\right) \\ &= \alpha(x - y, -3x + 3y) + \beta\left(x' - y', -3x' + 3y'\right) = \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

Ce qui montre que f *est linéaire.*

(2) *On a*

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = -3x + 3y = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\} \\ &= \left\{x \underbrace{(1, 1)}_{u_1} : x \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

donc $\{u_1\}$ *est une base de* $\ker(f)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \left\{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(x - y, -3x + 3y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{\underbrace{(x - y)}_{\lambda}(1, -3) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \{\lambda(1, -3) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\lambda \underbrace{(1, 3)}_{u_2} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

donc $\{u_2\}$ *est une base de Im*(f).

(3) *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *alors*

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x, y) &= f(f(x, y)) = f(x - y, -3x + 3y) \\ &= ((x - y) - (-3x + 3y), -3(x - y) + 3(-3x + 3y)) \\ &= (x - y + 3x - 3y, -3x + 3y - 9x + 9y) \\ &= (4x - 4y, -12x + 12y), \end{aligned}$$

Solution 43.

(1) *Soient* $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, v = \left(x', y', z'\right) \in \mathbb{R}^3$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right) \\ &= \Big(-2\alpha x - 2\beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', \\ &\quad \alpha x + \beta x' - 2\alpha y - 2\beta y' + \alpha z + \beta z', \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - 2\alpha z - 2\beta z'\Big) \\ &= \Big((-2\alpha x + \alpha y + \alpha z) + \left(-2\beta x' + \beta y' + \beta z'\right), \\ &\quad (\alpha x - 2\alpha y + \alpha z) + \left(\beta x' - 2\beta y' + \beta z'\right), (\alpha x + \alpha y - \alpha 2z) + \left(\beta x' + \beta y' - 2\beta z'\right)\Big) \\ &= \alpha(-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) + \\ &\quad \beta\left(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' - 2z'\right) \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

Donc f *est linéaire.*

(2) *On a*

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = x - 2y + z = x + y - 2z = 0\right\} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} \\ &= \left\{x \underbrace{(1, 1, 1)}_{u_1} : x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

donc $\{u_1\}$ *est une base de* $\ker(f)$, *et alors*

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker(f) = 3 - Card\{u_1\} = 2.$$

(3) *On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x \underbrace{(-2, 1, 1)}_{v_1} + y \underbrace{(1, -2, 1)}_{v_2} + z \underbrace{(1, 1, -2)}_{v_3} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}. \end{aligned}$$

Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est une famille génératrice, comme* $v_1 + v_2 = -v_3$ *et* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, *alors* $\{v_1, v_2\}$ *est une famille génératrice, montrons que* $\{v_2, v_3\}$ *est libre. Soit* $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Rightarrow (-2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

donc $\{v_2, v_3\}$ *est une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

Solution 44.

(1) *Soient* $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,$v=\left(x^{'},y^{'},z^{'},t^{'}\right)\in\mathbb{R}^4$ *et* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
f(\alpha u+\beta v) &= f\left(\alpha x+\beta x^{'},\alpha y+\beta y^{'},\alpha z+\beta z^{'},\alpha t+\beta t^{'}\right)\\
&= \Big(\alpha x+\beta x^{'}-2\alpha y-2\beta y^{'},\alpha x+\beta x^{'}-2\alpha y-2\beta y^{'},\\
&\quad 0,\alpha x+\beta x^{'}-\alpha y-\beta y^{'}-\alpha z-\beta z^{'}-\alpha t-\beta t^{'}\Big)\\
&= (\alpha x-2\alpha y,\alpha x-2\alpha y,0,\alpha x-\alpha y-\alpha z-\alpha t)+\\
&\quad \left(\beta x^{'}-2\beta y^{'},\beta x^{'}-2\beta y^{'},0,\beta x^{'}-\beta y^{'}-\beta z^{'}-\beta t^{'}\right)\\
&= \alpha(x-2y,x-2y,0,x-y-z-t)+\\
&\quad \beta\left(x^{'}-2y^{'},x^{'}-2y^{'},0,x^{'}-y^{'}-z^{'}-t^{'}\right)\\
&= \alpha f(u)+\beta f(v).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que f *est linéaire.*

(2) *Soit* $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, *on a*

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,z) &= (x-2y,x-2y,0,x-y-z-t)\\
&= (x-2y,x-2y,0,0)+(0,0,0,x-y-z-t)\\
&= (x-2y)(1,1,0,0)+(x-y-z-t)(0,0,0,1),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \left\{f(x,y,z,t):(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\right\}\\
&= \left\{\lambda\underbrace{(1,1,0,0)}_{u_1}+\lambda\underbrace{(0,0,0,1)}_{u_2}:\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \{\lambda u_1+\lambda u_2:\lambda,\mu\in\mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

avec $u_1=(1,1,0,0)$ *et* $u_2=(0,0,0,1)$.

(3) *Soit* $(x,y,z,t)\in\ker(f)$, *alors*

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,t)=0 &\Leftrightarrow (x-2y,x-2y,0,x-y-z-t)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ x-y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\ t=y-z\end{cases}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x=2y\ \text{et}\ t=y-z\right\}\\
&= \{(2y,y,z,y-z):x,y\in\mathbb{R}\}\\
&= \left\{y\underbrace{(2,1,0,1)}_{u_3}+z\underbrace{(0,0,1,-1)}_{u_4}:x,y\in\mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

On a $\{u_1,u_2\}$, $\{u_3,u_4\}$ *sont des familles génératrices de* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\ker(f)$ *respectivement, montrons que* $\{u_1,u_2\}$, $\{u_3,u_4\}$ *sont libres. Soit* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$,

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow(\lambda_1,\lambda_1,0,\lambda_2)=(0,0,0,0)\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,$$

$$\lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow (2\lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_3 - \lambda_4) = (0, 0, 0,) \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

donc $\{u_1, u_2\}$, $\{u_3, u_4\}$ *sont des bases de* $\operatorname{Im}(f)$ *et* $\ker(f)$ *respectivement. Ainsi* $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ *si et seulement si* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$.
Comme $\dim \mathbb{R}^4 = Card\,\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = 4$, *il suffit de prouver que* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *est libre.*
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}) &\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0,\end{aligned}$$

donc $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *est une base, ça signifie que* $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.

Bibliographie

[1] A. Hitta, *Cours d'Algèbre et Exercices Corriges,* Edition OPU, Algérie, 2006

[2] K. Allab, *Éléments d'Analyse, Fonction d'une variable réelle,* Edition OPU, Algérie, 1984.

[3] M. H. Mortad, *Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D,* Edition Dar el Bassair, Algérie, 2012.

[4] X. A. Dussau, J. Esterle, F. Zarouf et R. Zarouf, *Cours d'algèbre linéaire, ESTIA 1e Année–Mathématiques,* Edition 2008.

[5] J. Rivaud, *Exercices d'Analyse « Tome 1»*, Edition Vuibert, 1971.

[6] P. Thuillier, J.C. Belloc, *Mathématique, Analyse 1,* Edition Masson, 1990.

[7] P. Thuillier, J.C. Belloc, *Mathématique, Analyse 2*, Edition Masson, 1989.